

Olimpiada de matematică – faza locală

VASLUI
(12.02.2011)

Solutii

Clasa a VIII-a

1. Fie x, y numere reale astfel încât:

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 3 = 0.$$

Demonstrați că $x < y$.

G.M.10-2010

Soluție: Relația din enunț se mai scrie: $(x + \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$.

$$\text{De aici } \begin{cases} |x + \sqrt{2}| \leq 1 \\ |y - \sqrt{2}| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x + \sqrt{2} \leq 1 \\ -1 \leq y - \sqrt{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x < y$$

2. Fie $A = a\sqrt{2} + a \cdot b - b\sqrt{2} - 2$.

a). Arătați că dacă $A = 0$ și $b \in \mathbf{Q}$, atunci $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

b). Arătați că dacă $A = 2$ și $a, b \in \mathbf{Q}$, atunci $|a| = |b| = A$.

Soluție:

$$\text{a) } A = \sqrt{2}(a - \sqrt{2}) + b(a - \sqrt{2}) \Leftrightarrow (a - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\sqrt{2} \notin \mathbf{Q} & (1p) \\ a - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} & (1p) \end{cases}$$

$$\text{b) } A = 2 \Rightarrow (a - b) \cdot \sqrt{2} + a \cdot b - 4 = 0 \quad . \text{ Cum } a, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ sau } a = -2 \Rightarrow |a| = |b| = A.$$

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A iar punctul M exterior planului ABC astfel încât $MB \perp AB$ și $MC \perp AC$. Fie N, P și E mijloacele segmentelor AM, BC respectiv AC . Stabiliți dacă :

a) $PN \perp (ABC)$;

$$\text{b) } 4PN^2 = BM^2 - AC^2.$$

Soluție:

$$\text{a) Segmentele } BN \text{ și } CN \text{ sunt mediane relative ipotenuzei} \Rightarrow BN = \frac{AM}{2} = CN$$

$\Rightarrow \triangle NBC$ isoscel de vârf N și cum $[NP]$
 mediană $\Rightarrow NP \perp BC$ (1)
 $\triangle MCA$: $[NE]$ linie mijlocie $\Rightarrow NE \parallel MC$ și cum
 $MC \perp AC$ obținem $NE \perp AC$ (2)

$\triangle ABC$: $[PE]$ linie mijlocie $\Rightarrow PE \parallel AB$ și cum
 $AB \perp AC$ obținem $PE \perp AC$ (3)

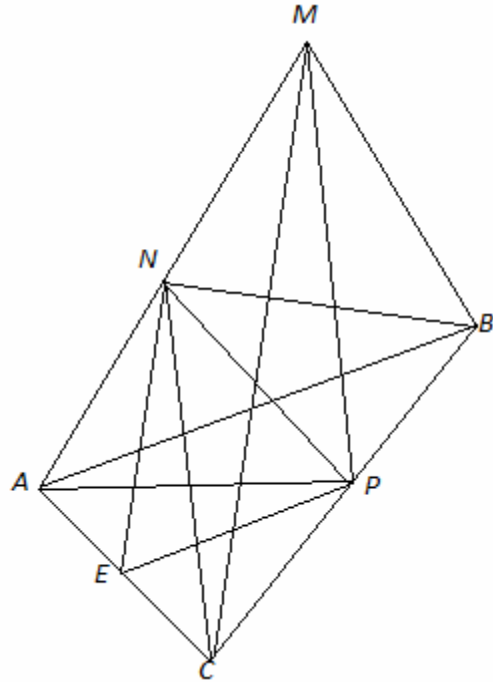
Din (2) și (3) obținem
 $AC \perp (NEP) \Rightarrow AC \perp NP$ (4)

Din (1) și (4) rezultă $NP \perp (ABC)$

b) $\triangle NPB \Rightarrow$ conform T.P

$$NP^2 = BN^2 - PB^2 = \frac{AM^2}{4} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4NP^2 = AM^2 - (AC^2 + AB^2) \Rightarrow 4NP^2 = AM^2 - AB^2 - AC^2 \Rightarrow 4NP^2 = BM^2 - AC^2$$



4. Fie dreptunghiul $ABCD$ și trapezul dreptunghic $BCEF$ în plane perpendiculare
 cu măsura unghiului BCE de 90° și $FB \parallel EC$. Dacă $AB = 8$ cm; $BC = 4$ cm; $CE = 1,6$ cm
 și $BF = 4,8$ cm. Să se determine: a) măsura unghiului dintre planele AEF și ABC ;
 b) tangenta unghiului dintre planele DEF și ABC .

Soluție:

Fie $EF \cap BC = \{T\}$, de unde $T \in BC$ și

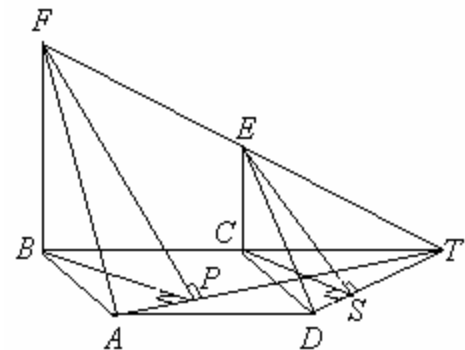
$$(AEF) \cap (ABC) = AT.$$

$$EC \parallel FB \Rightarrow \triangle TEC \sim \triangle TFB, \text{ de unde } \frac{EC}{FB} = \frac{TC}{TB} \Rightarrow$$

$$CT = 2 \text{ cm.}$$

Pentru că $(FBC) \perp (ABC)$ și $FB \perp BC$ avem

$$\left. \begin{array}{l} FB \perp (ABC) \\ BP \perp AT \\ BP, AT \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_p} FP \perp AT.$$



$$\left. \begin{array}{l} (AEF) \cap (ABC) = AT \\ \text{Întrucât } FP \perp AT \\ BP \perp AT \end{array} \right\} \Rightarrow m\angle((AEF), (ABC)) = m\angle(FBP)$$

Din triunghiul BAT , $m\angle(ABT) = 90^\circ$ avem $AT = 10$ cm și $BP = 4,8$ cm. Din $\triangle FPB$ avem $m\angle(FPB) = 45^\circ$. $(DEF) \cap (ABC) = DT$. Dacă

$$\left. \begin{array}{l} EC \perp (ABC) \\ CS \perp DT \\ CS, DT \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3p} ES \perp DT \Rightarrow m\angle((FDT), (ABC)) = m\angle(CSE).$$

Din $\triangle DCT$, $m\angle(DCT) = 90^\circ$ avem $DT = 2\sqrt{17}$, $CS = \frac{8}{\sqrt{17}}$ cm, și

$$\operatorname{tg}\angle(CSE) = \frac{EC}{CS} = \frac{1,6}{\frac{8}{\sqrt{17}}} = 0,2\sqrt{17} \text{ cm,}$$