OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 26.01.2008
CLASA a V-a

1. a) Arătaţi că numărul $a = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + ... + 8^{2008}$ este divizibil cu 10.
   b)Să se afle x număr natural ştiind că avem egalitatea:
   $$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^x = 2^{2008} - 2$$

2. a) Cifrele unui număr natural din trei cifre de forma $\overline{abc}$ verifică relaţia $49a + 7b + c = 286$. Să se afle numărul $\overline{abc}$.
   b) Determinaţi numărul p prim, ştiind că numărul $p^3 + 23$ este prim.
   G.M. 10/2007, E:13524

3. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a + a^2,\ a \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2b + 1,\ b \in \mathbb{N}\}$.
   a) Scrieţi cinci elemente ale mulţimii A şi cinci elemente ale mulţimii B;
   b) Arătaţi că mulţimile A şi B sunt disjuncte.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 26.01.2008
CLASA a VI-a

1. Suma a trei numere naturale este 2007. Împărțind al treilea număr la suma primelor două numere se obține câtul 20 şi restul 12. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două numere este 19, să se determine cele trei numere.

   G.M. 11/2007, E:13549

2. a) Fie $x = 2^{n+2} \cdot 5^{n+1} + 10^{n+2} - 5^{n+1} \cdot 2^{n+1} \cdot 11,\ n \in \mathbb{N}$. Arătați că pentru $n = 2005$ numărul x este pătrat perfect.

   b) Se consideră numărul $n = 1! + 2! + 3! + ... + 2008!$ unde am notat cu $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot k$. Să se afle ultima cifră a numărului n.

   c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$. Să se arate că numerele $a + b - 2c;\ a + c - 2b;\ b + c - 2a$ sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{c}; \frac{1}{b}; \frac{1}{a}$ dacă şi numai dacă $a = b = c$.

3. a) Să se calculeze valoarea numerică a raportului $k = \frac{48^0 35'}{16^0 11' 40''}$

   b) Fie A, B, C, D, E, F puncte coliniare în această ordine şi un punct O astfel încât $O \notin AB$. Dacă $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COE$ şi $\sphericalangle BOD \equiv \sphericalangle DOF$ arătați că

   $m(\sphericalangle COD) = \frac{m(\sphericalangle AOF) - m(\sphericalangle BOE)}{2}$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 26.01.2008
CLASA a VII-a

1. a) Arătați că numărul $a = 2^{2006} + 2^{1895} + 2^{1784}$ nu este pătrat perfect.
   b)Aflați numărul de soluții ale ecuației:
   $$|x| + |x+1| + |x+2| + ... + |x+2008| = -1-2-3-4-.....-2008$$

2. Spunem că două numere naturale nenule, a şi b, sunt asociate dacă $3a = 4b$ sau $3b = 4a$.
   a) Aflați un asociat al numărului 2007
   b) Determinați numărul care are doi asociați a căror sumă este 2000.
   c) Se alege la întâmplare un număr natural nenul mai mic decât 2008. Arătați că probabilitatea ca acesta să nu aibă nici un asociat este mai mare ca $\frac{1}{2}$.

3. Determinați $\overline{abc}$ astfel încât $\sqrt{\overline{abc}} = (a+b)\sqrt{c} = c\sqrt{a+b}$.

4. Se dă dreptunghiul ABCD cu AC=2AD iar $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AD, respectiv CD, iar punctul $E \in (AB)$ astfel încât AE=2BE, să se arate că:
   a) d(A; MN)+d(C; MN)+d(D; MN)=d(B; MN)
   b) Dacă $BT \perp MN$, atunci patrulaterul BTOE este trapez.

G.M. nr. 11/2007, E:13555

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 26.01.2008
CLASA a VIII-a

1. a) Verificați dacă este cub perfect numărul: $n = 3^{2007} + 3^{1895} + 3^{1782} + 3^{1668}$.

   G.M. 9/2007, E:13518

   b) Se consideră fracția:

   $$F(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25) + 12x(x+5) + 35}{(x+2)(x+3)+1}, \ x \in \mathbb{R} - \{-3, -2\}$$

   Arătați că $F(x) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

2. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt{1! + 2! + 3! + ... + n!} \in \mathbb{Q}$. S-a notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n$.

   b) Fie a, b, c numere reale. Dacă $a + 2b + 3c = 7m, \ m \neq 0,$ arătați că

   $$(a-m)^2 + (b-2m)^2 + (c-3m)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3. În interiorul unghiului XOY cu măsura de 60^0 se consideră punctul A depărtat de $[OX$ la 2 cm și față de $[OY$ la 11 cm. În punctul A pe planul (XOY) se ridică perpendiculara AM, $AM = 4\sqrt{3}\ cm$.
   a) calculați distanța de la M la laturile unghiului;
   b) calculați lungimea segmentului OM.

4. Să se determine numerele raționale a și b astfel încât

   $$\sqrt{2a^2 + 8a + 8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(b-3)^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**