Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a V-a
Varianta 2

1. **Suma dintre dublul primului numar si triplul de-al doilea este 2488. Impartind primul numar la sfertul celui de-al doilea obtinem catul 3 si restul 2. Aflati cele doua numere.**

2. a) Cate numere naturale cuprinse intre 1909 si 2105 sunt divizibile cu 10?
b)Determinati suma numerelor naturale cuprinse intre 1909 si 2105 care impartite la 28 dau restul 5 si impartite la 35 dau restul 12.

3. Fie A = $2008^{2009} + 2009^{2009} + 2006^{2008}$ şi
B= $2010 \cdot 2009 - 2009 \cdot 2008 - 2 \cdot 2008 + 2 \cdot 2007 - 2 \cdot 2006$
Stabiliți dacă numerele A şi B sunt pătrate perfecte.

4. Se da numarul $A = 5^n + 6^{n^2} + 7^{n^2+n}$, unde n$\in N*$.
a) **Aratati ca $n^2 + n$ este numar par;**
b) **Aflati ultima cifra a numarului A.**

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Subiecte selectate de prof. Costache Aurelian

Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a V-a
Varianta 2
Barem de corectare

1.reprezinta numerele..2p
reprezinta suma...2p
afla sfertul celui de-al doilea................................1p
finalizeaza..2p

2.a)scrie primul si ultimul nr......................................1p
Calculeaza cate sunt..1p
b)afla forma generala a numerelor..........................2p
afla cate numere sunt..1p
finalizeaza..2p

3.calculeaza U(2008^{2009}) ,U(2009^{2009}),U(2006^{2008})....3p
Finalizeaza A..1p
Calculeaza B...2p
Finalizeaza B..1p

4.a)$n^2+n=n(n+1)$ si discuta...2p
b)calculeaza fiecare cate ....1p=3p
finalizeaza...2p

Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

OLIMPIADA de MATEMATICĂ
Faza locală 17 februarie 2008
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

1. Raportul dintre prețul unui caiet şi prețul unei cărți este $\frac{2}{15}$. Ştiind că suma dintre dublul prețului caietului şi triplul prețului cărții este 39,2 RON, să se afle: a) prețul caietului şi prețul cărții; (4 puncte)

b) cu cât la sută din prețul caietului este mai mare prețul cărții. (3 puncte)

***

2. Determinați cifrele a şi b ştiind că media aritmetică a numerelor $\overline{aabb}, \overline{aba}, \overline{ba}$ şi b este 625.

G.M. 11/2007

(7 puncte)

3. Punctul C este mijlocul segmentului (AB) şi punctul B este mijlocul segmentului (CD). Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

$p_1 : "CD = \frac{AD + BC}{2}"$; (4 puncte)

$p_2 : "\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} \geq \frac{2}{AC}"$ (3 puncte)

4. Fie punctul O∈ XY. De aceeaşi parte a dreptei *XY* se duc semidreptele (*OA* si (*OB* astfel încât m (<AOB) = 90^0, (OA ⊂ int ∠ XOB. Dacă (*OC* şi (*OD* sunt bisectoarele unghiurilor <X*OB*, respectiv <*AOY*, arătați că măsura unghiului <COD este constantă.

***

(7 puncte)

Probleme selectate de prof. MARIANA RĂDULESCU

Nota:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

OLIMPIADA de MATEMATICĂ
Faza locală 17 februarie 2008
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

Barem de corectare şi notare

1. a) $\frac{x}{y}=\frac{2}{15}$, unde x este preţul caietului şi y preţul cărtii 1p

2x + 3y = 39,2 .... 1p

x = 1,6 RON 1p

y = 12 RON 1p

b) x + p% ·x = y 1p

finalizare p% = 650% 2p

2. $\frac{\overline{aabb}+\overline{aba}+\overline{ba}+b}{4}=625$ 1p

$\frac{1100a+11b+101a+10b+10b+a+b}{4}=625$ 2p

1202a +32b = 2500 .... 1p

$\Rightarrow$ a $\in$ {1, 2} 1p

Finalizare a = 2 şi b = 3 .... 2p

3. AC = CB = BD = x 1p

P_1: $CD=\frac{AD+BC}{2}\Leftrightarrow 2x=\frac{3x+x}{2}\Leftrightarrow 2x=2x$ (A) 3p

P_2: $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\geq\frac{2}{x}\Leftrightarrow\frac{11}{6x}\geq\frac{12}{6x}$ (F) 3p

4. Notăm m(<XOA) = 2x şi m(<YOB) = 2y 1p

m(<XOC) = m(<COB) = x + 45^0 .... 1p

m(<AOD) = m(<DOY) = y + 45^0 .... 1p

m(<AOC) = 45^0 –x ; m(<BOD) = 45^0 – y 1p

m(<COD) = x + y 1p

2x + 90^0 + 2y = 180^0 .... 1p

Finalizare: m(<COD) = 45^0 (constant) 1p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008

Clasa a VII-a
Varianta a II-a

1. a) Demonstrați că $\sqrt{1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008} \notin \mathbf{Q}$.

   b)Dacă $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$, demonstrați că $\frac{1}{2}<S<1$.

2. Fie a,b,c numere reale positive astfel încât: $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Arătați că:

   a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbf{Q}$;

   b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}} \in$ **R-Q**.

3. Fie ABCD un paralelogram. Notăm cu M punctul in care se intersectează bisectoarele unghiurilor A şi D şi cu N punctul in care se intersecteaza bisectoarele unghiurilor B şi C.
   a) Calculati masura unghiului AMD;
   b) Demonstrați că MN||AB.

4. Se dă ΔABC cu AB=4cm, BC=6cm, AC=5cm. Prelungim latura [AB] cu segmentul [BD], BD=6cm şi latura [AC] cu segmentul [CE], CE=3cm.
   a) Calculati lungimea segmentului [DE];
   b) Dacă {M}=BC∩DE, calculați PΔMCE.

Subiecte selectate de prof. Dumitru Borocan

Notă :
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru :3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008

Clasa a VII-a

Varianta a II-a

1 Soluţie:

a) Ultima cifră a produselor: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5, 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6, ..., 1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2008$ este 0---(1p)

Ultima cifră a numărului $n=1+1\cdot2+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3\cdot4+...+1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2008$ este 3 --(1p)

Deoarece U(n)=3 $\Rightarrow$ n nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{n}\notin$ **Q**---------------(1p)

b) $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)=$ ------------------------(1p)

$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$ --(1p)

$S<50\cdot\frac{1}{50}=1$---(1p)

$S>50\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{2}$ --(1p)

2Soluţie:

$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k\Rightarrow a=k(b+c), b=k(a+c), c=k(a+b)$ ------------(1p)

$\Rightarrow a+b+c=k(2a+2b+2c)\Rightarrow k=\frac{1}{2}$ ---(1p)

sau $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$ --(2p)

$2a=b+c, 2b=a+c, 2c=a+b$ --(1p)

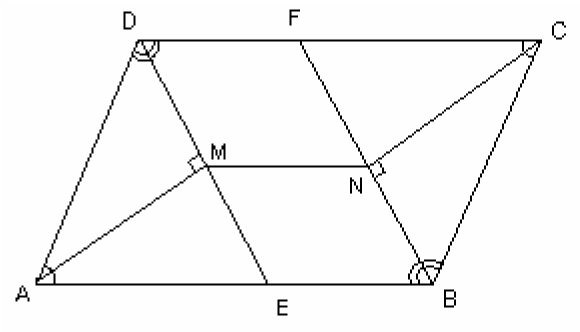
$2b=a+\frac{a+b}{2}\Rightarrow b=a$ ---(1p)

$2c=a+\frac{a+c}{2}\Rightarrow c=a$ --(1p)

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1\in$ **Q**-----------------------(1p)

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\in$ **R-Q**-----------------------(1p)

3.Soluție:



a) $m(< AMD) = 180^0 - \left(\frac{m(< A) + m(< D)}{2}\right) = 180^0 - \frac{180^O}{2} = 90^O$ --------------------------------(2p)

b) Notăm {E}=DM∩AB si {F}=BN∩DC.

ΔAMD≡ΔAME (ULU) $\Rightarrow$ M este mijlocul segmentului [DE] si $ME = \frac{DE}{2}$.

Analog $BN = \frac{BF}{2}$ ---(1p)

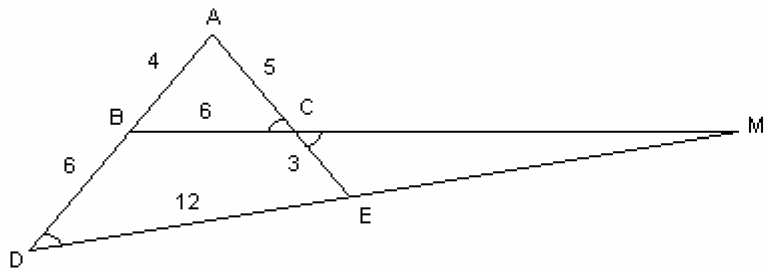
[AE] ≡ [AD] ≡ [BC] ≡ [CF] $\Rightarrow$ [BE] ≡ [DF]--(1p)

BE||DF şi [BE] ≡ [DF] $\Rightarrow$ BEDF paralelogram--(1p)

ME||BN şi [ME] ≡ [BN] $\Rightarrow$ MEBN paralelogram---------------------------------------(1p)

$\Rightarrow$ MN||BC---(1p)

4.Soluție:



$\frac{AB}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ (1)--(1p)

Din (1) şi <BAC≡<EAD $\Rightarrow$ ΔBAC~ΔEAD (2)--(1p)

DE=12cm ---(1p)

Din (2) $\Rightarrow$ <ACB≡<D---(1p)

Din <MCE≡<MDB şi <EMC≡<BMD $\Rightarrow$ ΔMEC~ΔMBD--------------------------------(1p)

$\frac{MC}{MD} = \frac{CE}{DB} = \frac{ME}{MB}$ --(1p)

$\frac{MC}{ME+12} = \frac{1}{2} = \frac{ME}{MC+6} \Rightarrow 2MC = ME + 12$ şi $2ME = MC + 6 \Rightarrow ME = 8cm, MC = 10cm$ -------(1p)

ISJ. Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a VIII-a
Varianta 2

1. **a) Fie a,b,c $\in$ Q* astfel încât a + b + c = 0 . Demonstrați că** $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \in$ **Q .**

b) Calculați S = $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2007^2}+\frac{1}{2008^2}}$ **.**

2. **Un pătrat cu latura de n cm , n $\in$ N* , se împarte în n^2 pătrate cu latura de 1 cm şi în fiecare dintre aceste pătrate se înscrie câte un cerc tangent laturilor pătratului în care se înscrie. Fie a numărul punctelor de tangență ale cercurilor între ele .**

a) **Determinați a pentru n = 6 .**

b) **Care este probabilitatea ca , pentru 2 $\le$ n $\le$ 2008 , n arbitrar ales , numărul 2a să fie pătrat perfect ?**

3. **Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată în care VA $\perp$ VC , d = (VAB) $\cap$ (VDC) şi g = (VBC) $\cap$ (VAD) .**

c) **Arătați că (d , g) // (ABC) .**

d) **Aflați m ($\angle$ VAB) .**

e) **Fie M $\in$ [VB] astfel încât oricare ar fi punctul P $\in$ [VB] , AM + MC $\le$ AP + PC . Calculați lungimea segmentului BM ştiind că AB = 2 a cm .**

4. **Pe planul triunghiului isoscel ABC ([AB] $\equiv$ [AC]) se duce perpendiculara în G (centrul de greutate) şi se ia pe acesta un punct D . Fie punctul N $\in$ [AB] astfel încât** $\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$ **; prin N se duce un plan α // (DBC) care intersectează DG în Q .**

f) **Stabiliți valoarea raportului** $\frac{GQ}{GD}$ **.**

g) **Determinați m($\angle$(α , (ABC))) ştiind că DG =** $\frac{AM}{3}$ **, unde *M* este mijlocul lui [BC].**

Subiecte propuse de prof.Codeci Daniel.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru : 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a VIII-a
BAREM DE CORECTARE, Varianta 2

1. a) Din a + b + c =0 $\Rightarrow$ $\frac{2(a+b+c)}{abc}$ **= 0** $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ab}$ **= 0** $\Rightarrow$ **……………1p**

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ab} = (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \Rightarrow$ **……………2p**

$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \in$ **Q** **…………… 1p**

b) În relația de la punctul a) se consideră a = 1 , b = k – 1 ,c = - k , cu a + b + c = 0 $\Rightarrow$

$\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}} = \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right| = \mathbf{1} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ **…………… 1p**

În această relație se consideră k = 2,3 ,…,2008 şi se obține :

S = 1 + $\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}$ **+ 1 +** $\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}$ **+ 1 +** $\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4}$ **+ … + 1 +** $\frac{1}{2008-1}-\frac{1}{2008}$ **= ……. 1p**

=2007 + 1 - $\frac{1}{2008} = \frac{4032063}{2008}$. **……………….. 1p**

2. a) Se constată că punctele de tangență căutate coincid cu mijloacele laturilor pătratelor de
lungime 1,cu excepția celor situate pe laturile pătratului mare.

Pentru cazul n = 6 , în rețeaua celor 36 pătrate mici obținute , punctele căutate se pot număra astfel : pe fiecare dintre cele 5 paralele orizontale la latura pătratului inițial se găsesc
câte 6 puncte , deci 5 .6 = 30 puncte .Analog , pe cele 5 paralele verticale se află tot 30 puncte. În total sunt a = 30 . 2 = 60 puncte .

………………….se punctează 2p răspunsul corect(60puncte) şi 2p justificarea (oricare ar fi).

b) Pentru cazul general , printr – un raționament asemănător celui de la punctul a) ,se obține că sunt : a = (n – 1) . n .2 = 2n(n-1) puncte $\Rightarrow$ **……………………………1p**
2a = 4n(n-1)

cum: (n-1)^2 **< n (n – 1) <n**^{2} $\Rightarrow$ **n (n – 1) nu poate fi pătrat perfect** $\Rightarrow$ **………………1p**

2a = 2^2 **.n (n – 1) nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi n** $\in$ **N , n** $\geq$ **2** $\Rightarrow$ **p=0 ………….. 1p**

3.a)Din d = (VAB) $\cap$ **(VDC) ,AB** $\subset$ **(VAB) , DC** $\subset$ **(VDC) , AB // DC** $\Rightarrow$ **d // AB …. 1p**

Analog se obține că g //AD . Cum AB $\subset$ **(ABC) , AD** $\subset$ **(ABC)** $\Rightarrow$ **(d , g) // (ABC) ….1p**

b) Se obține că Δ **VAC şi** Δ **ABC sunt dreptunghice isoscele , cu ipotenuza AC comună , deci sunt congruente ,de unde rezultă că : [VA]** $\equiv$ **[AB]** $\equiv$ **[VB]** $\Rightarrow$ Δ **VAB echilateral** $\Rightarrow$
m ($\angle$ **VAB) = 60**^{0}**. ……………………………2p**

c) Se desfăşoară fețele laterale VAB şi VBC ale piramidei în acelaşi plan. Punctul M căutat este la intersecția segmentelor AC şi VB , pentru că în ΔACP , AM + MC = AC $\leq$ AP+ PC
oricare ar fi poziția punctului P $\in$ [VB]. ………………………. 2p

Cum ΔVAB şi ΔVBC sunt echilaterale $\Rightarrow$ ABCV- romb $\Rightarrow$ BM = $\frac{VB}{2}$ = a cm. .. .1p

4. a) Fie mediana AM a ΔABC , $\alpha \cap$ AM = {R} , $\alpha \cap$ AC = {P}. Din $\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{7}{9}$, din α // (DBC) $\Rightarrow$ NP // BC şi QR //DM $\Rightarrow$ ……………………. 1p

$\frac{NP}{BC} = \frac{7}{9} = \frac{AR}{AM} \Leftrightarrow \frac{2GM+GR}{3GM} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{2GM+GR}{2GM} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ …….. 1p

$\frac{GQ}{GD} = \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3}$ ……………………….. 1p

b)
m($\angle$(α , (ABC))) = m($\angle$((DBC),(ABC))) = m($\angle$DMA) …………………………. 2p
Din

DG = $\frac{AM}{3}$ $\Rightarrow$ [DG]$\equiv$ [GM] $\Rightarrow$ ΔDGM dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ m($\angle$DMG) = 45^0 … 2p