

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a VIII- a

24 Ianuarie 2009

SUBIECTUL I (7p)

- 2p) a) Se consideră două numere reale a și b astfel încât $b - a = 1$. Demonstrați că mulțimea $(a, b] \cap \mathbb{Z}$ conține exact un element.
- b) Demonstrați că pentru fiecare două numere naturale nenule m și n , există un unic
- 3p) număr natural x , astfel încât: $\frac{1}{mx - \sqrt{mn + 16} - 1} \geq \frac{1}{m}$.
- 2p) c) Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel ca: $\frac{1}{mx - \sqrt{mn + 16} - 1} \geq \frac{1}{m}$ și $n - m = 8$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL II (7p)

Fie numărul $a = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

- 3p) a) Să se demonstreze că $[2a] = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $[2a]$ reprezintă partea întreagă a numărului $2a$.
- 4p) b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{a\} = \frac{1004}{2009}$, unde $\{a\}$ = partea fracționară a lui a .

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră triunghiul $\triangle BCD$, un punct A în exteriorul planului triunghiului $\triangle BCD$. Fie S mijlocul segmentului (BD) și R mijlocul segmentului (AC) . Prin mijlocul M al segmentului (AB) se construiește un plan paralel cu AC și BD care intersectează (BC) , (CD) și (DA) în N, P și respectiv Q .

- 4p) a) Să se demonstreze că dreptele MP , NQ și SR sunt concurente.
- b) Determinați măsura unghiului ascuțit format de dreptele AC și BD , știind că aria
- 3p) patrulaterului $MNPQ$ este $A_{MNPQ} = \frac{1}{8} AC \cdot BD$.

SUBIECTUL IV (7p)

Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ABE sunt incluse în plane distincte. Se consideră punctele $M, N \in (AB)$ astfel încât $AM = MN = NB$ și se notează cu G și respectiv F centrele de greutate ale triunghiurilor BEM și ADN .

- 4p) a) Demonstrați că $FG \parallel (CDE)$.
- 3p) b) Determinați lungimea segmentului FG știind că $AB = 18$ cm, iar măsura unghiului format de dreptele AB și DE este egală cu măsura unghiului format de dreptele AD și CE .

NOTĂ: Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru – 3 ore.