INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 5-A

1. a) Să se calculeze

$$52\cdot 51-51\cdot 50+50\cdot 49-49\cdot 48.$$

b) Se consideră numărul

$$n=100\cdot 99-99\cdot 98+98\cdot 97-97\cdot 96+\ldots+4\cdot 3-3\cdot 2+2\cdot 1.$$

Să se arate că numărul $2n$ este pătrat perfect.

2. a) Să se verifice că $(2^3)^2<3^{2^2}<2^{3^2}$.

b) Fie numerele naturale $a,b\geq 2$. Să se arate că numărul $2^{2^a}+2^{2^b}$ nu este pătrat perfect.

3. Un număr natural A va fi numit „*rotund*" dacă suma cifrelor lui A este egală cu numărul cifrelor lui A (de exemplu, numărul 300210 este *rotund*).

a) Să se scrie toate numerele naturale *rotunde* care au trei cifre.

b) Să se calculeze diferența dintre cel mai mare şi cel mai mic număr *rotund* care au câte 100 de cifre.

c) Să se arate că, pentru orice număr natural $n\geq 2$, există un număr *rotund* care are $2n$ cifre şi este divizibil cu 22.

4. Pe tablă sunt scrise numerele 3, 7, 12, 14, 22, 35, 49. Doi elevi şterg câte trei numere. Un al treilea elev constată că suma numerelor şterse de unul dintre ei este de patru ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Să se determine numărul rămas pe tablă.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 6 - A

1. Să se determine numerele naturale nenule a, b, ştiind că suma lor este 74 şi, împărţind pe a la b, se obţine un cât egal cu restul împărţirii.

2. Se consideră mulţimile

$$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{N}, x \le 11\},\ B = \{y \mid y = 2k+1, k \in \mathbf{N}, y < 15\},$$

$$C = \left\{z \mid z = \frac{x+y+1}{3}, x \in A, y \in B\right\}$$

a) Determinaţi cardinalul fiecăreia dintre mulţimile A, B, C.

b) Să se determine $\mathbf{N} \cap C$.

c) Să se decidă dacă mulţimile $(A \cup B) \times B$ şi $(A \times B) \cup (B \times B)$ au acelaşi cardinal.

3. Se consideră numărul $M = 7^{2008} + 4$.
a) Să se determine ultima cifră a numărului M.
b) Să se arate că M nu este un pătrat perfect.

4. Se dau unghiurile $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \ldots, \angle A_{12}OA_{13}$, astfel încât oricare două nu au puncte interioare comune. Semidreptele $(OA_1$ şi $(OA_{13}$ sunt opuse, iar măsurile celor 12 unghiuri, exprimate în grade, sunt numere naturale pare consecutive.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor.

b) Există două dintre cele 12 bisectoare ale unghiurilor, care să aibă dreptele suport perpendiculare ?

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 7-A

1. a) Să se arate că nu există niciun număr rațional r care să verifice egalitatea

$$(|r|-\sqrt{3})(r+1,73)=1.$$

b) Să se determine cel mai mic număr real r care să verifice egalitatea

$$(|r|-\sqrt{3})(r+1,73)=0.$$

2. Vom spune că un an este *„magic”* pentru o persoană dacă numărul anului este divizibil cu vârsta care urmează să o împlinească persoana în cursul lui. Există două persoane născute în secolul XXI care, oricât ar trăi, nu pot avea nici un an magic comun ? Justificați răspunsul.

3. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$, se consideră punctele E şi F pe latura (BC), astfel încât $BE=EF=FC$ şi $E\in(BF)$. Fie $D\in(AB)$ astfel încât $BD=2AD$ şi G intersecția dreptei DF cu înălțimea AA' a triunghiului ABC, $A'\in(BC)$.

a) Să se arate că patrulaterul $ADEG$ este paralelogram.

b) Să se arate că patrulaterul $ADEG$ este romb dacă şi numai dacă $m(\angle BAC)=120°$.

4. Fie $ABCD$ un pătrat şi $(BE$ bisectoarea unghiului $\angle ABD$, $E\in AD$. Dreptele BE şi AC se taie în M, iar perpendiculara în M pe BE taie dreptele CD şi BD în F şi T.

a) Să se arate că triunghiul DET este isoscel.

b) Să se arate că $EF\parallel AC$.

c) Să se arate că $ET\perp BF$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 8 - A

1. Să se afle toate perechile de numere naturale $(a,b), b \neq 0$, ştiind că $a+b=2007$ şi că restul împărţirii lui a la b este egal cu câtul acestei împărţiri.

2. Considerăm inegalitatea $\sqrt{(a+b)(c+d)} > \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, unde a,b,c,d sunt numere reale pozitive distincte.

a) Să se arate că, dacă $a<c<b<d$, atunci inegalitatea este adevărată.

b) Este inegalitatea adevărată pentru orice a,b,c,d ?

3. Se consideră în plan un sistem de coordonate şi punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$, $C(4,2)$, $V_1(0,6)$, $V_2(2,0)$, $V_3(6,4)$.

a) Să se verifice că triunghiul ABC este isoscel.

b) Să se arate că există în spaţiu un punct V astfel încât reuniunea triunghiurilor V_1AB, V_2AC, V_3BC, ABC să reprezinte desfăşurarea tetraedrului $VABC$.

c) Să se determine distanţa de la V la planul (ABC), unde V este punctul definit la b).

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele M,N,P,Q pe feţele $ABCD, BCC'B', A'B'C'D'$, respectiv $ADD'A'$, astfel încât triunghiurile $ABM, B'C'N, C'D'P, ADQ$ să fie echilaterale.

a) Să se arate că punctele M,N,P,Q sunt coplanare.

b) Să se arate că $MNPQ$ este dreptunghi, dar nu este pătrat.

c) Să se arate că dreptele MP şi NQ fac cu dreapta AA' unghiuri complementare.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore