

Olimpiada Națională de Matematică 2007

Etapa finală, Pitești, 11 aprilie 2007

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Să se arate că numărul 10^{10} nu poate fi scris ca produsul a două numere naturale a căror reprezentare zecimală să nu conțină cifra 0.

Subiectul 2. Într-o clădire sunt 6018 birouri în 2007 camere, iar în fiecare cameră se află măcar un birou. Orice cameră poate fi golită distribuind birourile în celelalte camere astfel încât în acestea să fie un număr egal de birouri. Să se determine modurile în care sunt dispuse birourile în clădire.

Subiectul 3. a) Într-un triunghi MNP , lungimile laturilor sunt mai mici decât 2. Arătați că lungimea înălțimii corespunzătoare laturii MN este mai mică

decât $\sqrt{4 - \frac{MN^2}{4}}$.

b) Într-un tetraedru $ABCD$, cel puțin 5 muchii au lungimi mai mici decât 2. Arătați că volumul tetraedrului este mai mic decât 1.

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un tetraedru. Demonstrați că dacă un punct M din spațiu satisface relația

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + CD^2 &= MB^2 + MC^2 + DA^2 = \\ &= MC^2 + MD^2 + AB^2 = MD^2 + MA^2 + BC^2, \end{aligned}$$

atunci aparține perpendicularei comune a dreptelor AC și BD .