

Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2008

EDIȚIA a V-a SLATINA – 28 – 29 noiembrie 2008

Clasa a IV-a

1. a) Câte semne „+“ sunt în egalitatea $3 + 3 + 3 + \dots + 3 = 213$?
b) Numerele naturale a, b, c sunt consecutive, iar produsul lor este 990. Aflați numărul b .
c) Scrieți numerele naturale a, b, c și d în ordine descrescătoare, știind că

$$a - 8 = b + 7 = c - 7 = d + 8.$$

2. Calculați:

a) $99996 : 3$.

b) $(1\,000\,000 - 4) : 3$.

c) $\left(\underbrace{100\dots0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4 \right) : 3$.

3. Cristi și Mircea sunt prieteni. Mircea are o bicicletă. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 2 ciocolate, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 3 ore. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 28 de caramelle, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 2 ore. Aflați pentru cât timp va primi Cristi bicicleta lui Mircea în cazul în care Cristi îi oferă lui Mircea o ciocolată și 7 caramelle.

4. Fie $N = 123456789101112\dots$ (se "lipesc" numerele naturale în ordine crescătoare începând de la 1). Care este cifra de pe poziția 20008?

Clasa a V-a

1. Să se determine numerele naturale \overline{abc} cu proprietatea $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. *Florian Dumitrel*

2. Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural n , obținem resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.

- a) Câte resturi, dintre cele 10, sunt egale cu 2?

- b) Determinați cel mai mic număr n care satisface condițiile din enunț.

Florica Banu

3. Mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăți:

- a) Media aritmetică a elementelor mulțimii A este egală cu 2008.

- b) Dacă eliminăm cel mai mic element al mulțimii A , media aritmetică a elementelor rămase este 2010.

- c) Dacă eliminăm cel mai mare element al mulțimii A , media aritmetică a elementelor rămase este 2006.

Determinați numărul de mulțimi A care au aceste proprietăți.

Mircea Fianu

4. O pereche de numere naturale (m, n) se numește *interesantă* dacă atunci când calculăm suma $m + n$ nu au loc treceri peste ordin. De exemplu: o pereche *interesantă* cu suma 76 este $(22, 54)$ iar o pereche cu suma 76 care nu este *interesantă* este $(49, 27)$.

Să se calculeze numărul perechilor *interesante* cu suma 2793.

Marius Perianu

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine care pot fi ultimele două cifre ale sumei a 75 de numere naturale consecutive.

- b) Patru numere naturale nenule au proprietatea că media aritmetică a oricăror trei este divizibilă cu al patrulea. Să se demonstreze că numerele sunt egale. *Costel Anghel, Marius Perianu*

2. Determinați cel mai mic număr natural n cu proprietatea că suma resturilor obținute prin împărțirea la 10, 11, 12, ..., 19 este egală cu 135. *Emil Ciolan*

3. Fie $a = 2008! + 2007! + \dots + 3! + 2!$, unde pentru $n \in \mathbb{N}^*$ am notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ și $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă $s = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6} + \dots$ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre), să se arate că a și s nu sunt pătrate perfecte. *Cătălin Amza*

4. Pe o dreaptă d se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{45}$, $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = \dots = A_{44} A_{45} = 1$.

Să se arate că oricum am alege 10 puncte din mulțimea $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{45}\}$, există printre acestea 4, notate M, N, P, Q , astfel încât segmentele $[MN]$ și $[PQ]$ să aibă același mijloc. *Maria Pop*

Clasa a VII-a

1. Se consideră pătratul $ABCD$ și O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Construim pătratul $O EFG$, congruent cu $ABCD$, astfel încât $B \in (AE)$.

- Să se arate că punctele B, C, G sunt coliniare.
- Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului BEO .

Costel Anghel

2. Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se poate partiționa în mod unic în două submulțimi nevide A, B cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x < y$, astfel încât $x \mid y$, sunt îndeplinite următoarele condiții:

- dacă $x \in A$ atunci $y \in B$;
- dacă $y \in B$ atunci există $d \in A$ astfel încât $d \mid x$.

Marius Perianu

3. Aflați numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ să fie pătrat perfect, unde $[x, y]$ și (x, y) reprezintă cel mai mic multiplu comun respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .

Alexandru Ciolan

4. Să se determine toate valorile numărului natural nenul k pentru care există un dreptunghi care se poate împărți, ducând paralele la laturile sale, atât în k pătrate congruente cât și în $k + 88$ pătrate congruente.

Marius Perianu

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că $(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = x^2 - 3y^2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\sqrt{3n^2 + 7n + 4} \in \mathbb{Q}$.

Florian Dumitrel

2. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ un poligon regulat cu $n \geq 4$ vârfuri. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulțimi $M \subset \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ astfel încât oricare patru puncte din M să nu fie vârfurile unui dreptunghi (sau pătrat).

Vasile Pop

3. Fie A și B două mulțimi de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numerele $\frac{b^{2n-1} + b^{2n}}{a^{2n-1}}$ și $\frac{a^{2n} + a^{2n+1}}{b^{2n}}$ sunt naturale. Să se demonstreze că $A \subset B$.

Marius Perianu

4. Se consideră piramida $VABCD$, cu $ABCD$ patrulater convex. Se notează M, N, P, Q mijloacele muchiilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$ și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC, VCD , respectiv VDA . Să se demonstreze că dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente.

Costel Anghel