Județul Alba, 13 februarie 2015 Etapa locală

Clasa a V-a

1. Se consideră șirul: 1, 5, 9, 13, 17, ...
   a) Completați șirul cu încă doi termeni.
   b) Arătați că termenul al 13-lea este egal cu $1 + 4 \cdot 12$, iar termenul al 14-lea este egal cu $1 + 4 \cdot 13$.
   c) Calculați suma primilor 200 termeni.

2. Se consideră numărul natural: $N = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2014} + 3^{2015}$.
   a) Arătați că numărul N este divizibil cu patru. b) Aflați restul împărțirii numărului N la 11^2.

3. Determinați primele patru cifre și numărul cifrelor egale cu 0(zero) ale numărului natural $a = (3^4 \cdot 6^{2014} \cdot 5^{2015} + 3^3 \cdot 15^{2015} \cdot 2^{2016} - 3^{2014} \cdot 10^{2015}) : 3^{2014} + 2015$.

4. Un număr natural de cel puțin patru cifre are proprietatea că, **dacă se elimină ultimele două cifre, atunci numărul se micșorează de 101 ori**.
   a) Demonstrați că dacă numărul are patru cifre, atunci cel mult două cifre sunt distincte.
   b) Câte numere naturale de patru cifre au proprietatea din enunț.
   c) Demonstrați că orice număr natural cu proprietatea din enunț are exact patru cifre.

Clasa a VI-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:
   a) $\frac{x+3^2-2}{3} + \frac{x+5^2-2}{5} = 8$. b) $\frac{x-2+3^2}{3} + \frac{x-2+5^2}{5} + \frac{x-2+7^2}{7} + \cdots + \frac{x-2+197^2}{197} + \frac{x-2+199^2}{199} = 9999$.

2. Se consideră numerele naturale $\boldsymbol{a} = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 8$ și $\boldsymbol{b} = 6^{\boldsymbol{a}}$, unde n este un număr natural oarecare.
   a) Arătați că numărul 36 se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
   b) Determinați restul împărțirii lui $\boldsymbol{a}$ la 3.
   c) Arătați că numărul $\boldsymbol{b}$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.

3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOE$ astfel încât punctele E, O și A să fie coliniare. Știind că: $4 \cdot m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle BOC) = \frac{4}{5} \cdot m(\sphericalangle COD)$ și $\frac{m(\sphericalangle DOE)}{8} = \frac{m(\sphericalangle COD)}{5}$. Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOE$.

4. Două unghiuri complementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de 25°. Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparține interiorului unghiului format de cele două bisectoare.
   a) Demonstrați că cele două unghiuri nu pot fi adiacente. b) Determinați măsurile celor două unghiuri.

Clasa a VII-a

1. Se consideră numărul real $x = \frac{3+a\sqrt{18}}{2+b\sqrt{32}}$, unde a și b sunt numere raționale.
   a) Arătați că dacă $a = 6$ și $b = 3$, atunci x este număr rațional. b) Dacă $x \in \mathbb{Q}$, arătați că $a = 2b$.

2. Arătați că dacă a, b și c sunt cifre nenule ce reprezintă lungimile laturilor unui triunghi și $\frac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}}$, atunci triunghiul este echilateral.

3. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ ($m(\sphericalangle A) < 90^\circ$, $AB > BC$) se iau punctele $E \in (AB)$, $F \in (DC)$, astfel încât $EA = ED$ și $FC = FB$.
   a) Demonstrați că patrulaterul $DEBF$ este paralelogram.
   b) Dacă $G \in (EF)$ astfel încât $2EG = GF$, demonstrați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului AEC.

4. Fie $ABCD$ un trapez astfel încât $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Considerăm, în plus, că P este simetricul lui A față de DO, $(AP) \cap (DO) = \{E\}$ și Q este simetricul lui B față de CO, $(BQ) \cap (CO) = \{F\}$. Demonstrați că:
   a) $\sphericalangle OAE \equiv \sphericalangle OBF$; c) $AE \cdot BD = BF \cdot AC$;
   b) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DAB}$; d) $\sphericalangle APC \equiv \sphericalangle BQD$. *Gazeta Matematică 1/2015(prelucrare)*

Clasa a VIII-a

1. Determinați numerele reale x și y care verifică egalitatea: $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7} + \sqrt{y^2 - 6y + 18} = 5$.

2. Se dă expresia $E_{(x,k)} = x^2 + (4k+1)x - 4k - 2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$ iar $k \in \mathbb{N}$.
   a) Arătați că $E_{(x,k)} = (x-1) \cdot (x+4k+2)$, $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$ și $\forall\, k \in \mathbb{N}$. b) Determinați x din $\mathbb{N}^*$ astfel încât $E_{(x,k)} = 0$.
   c) Demonstrați că $\frac{x+k}{3k+2} \geq \frac{k+1}{x+3k+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}$.
   d) Rezolvați ecuația: $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{8} + \cdots + \frac{x+33}{101} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x+7} + \cdots + \frac{34}{x+100}$.

3. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$, de latură a și fie M simetricul punctului A față de punctul B. Se notează cu O punctul de intersecție al diagonalelor bazei $ABCD$.
   a) Determinați, în funcție de a, distanța de la punctul C' la dreapta OM.
   b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele BD' și $C'O$.

4. Se dă tetraedrul $ABCD$, cu muchiile $AB = a, CD = b; a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Secționăm tetraedrul $ABCD$ cu un plan $(MNPQ)$ paralel cu muchiile AB și CD astfel încât $M \in (BC), N \in (BD), P \in (AD), Q \in (AC)$ și $\frac{MB}{MC} = x$.
   a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. b) Arătați că $MN = \frac{bx}{x+1}$.
   c) Determinați, în funcție de a și b valoarea raportului $x = \frac{MB}{MC}$ astfel încât paralelogramul $MNPQ$ să aibă perimetrul maxim, exprimat printr-un număr întreg.

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a V-a

Problema 1.

a) 21, 25 .... 2 puncte

b) verificare directă: $49 = 1 + 4 \cdot 12$ și $53 = 1 + 4 \cdot 13$ .... 1 punct

c) termenul al 200-lea: $1 + 4 \cdot 199 = 797$ .... 1 punct

numărul termenilor: $199 + 1 = 200$ .... 1 punct

$2S = (1 + 797) + (5 + 793) + (9 + 789) + \cdots + (797 + 1)$ .... 1 punct

Finalizare $S = 798 \cdot 200 : 2 = 79.800$ .... 1 punct

Problema 2.

a) $N = (1 + 3) + 3^2 \cdot (1 + 3) + \cdots + 3^{2014} \cdot (1 + 3)$ .... 2 puncte

$N = \mathcal{M}_4$ .... 2 puncte

b) $2016 = \mathcal{M}_5 + 1$ .... 1 punct

$N = 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \cdots + 3^{2011} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$ ..... 1 punct

$N = \mathcal{M}_{121} + 1$ .... 1 punct

Problema 3. $a = (3^4 \cdot 6^{2014} \cdot 5^{2015} + 3^3 \cdot 15^{2015} \cdot 2^{2016} - 3^{2014} \cdot 10^{2015}) : 3^{2014} + 2015$

$a = (2^{2014} \cdot 3^{2018} \cdot 5^{2015} + 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 5^{2015} - 2^{2015} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}) : 3^{2014} + 2015$ ...2 puncte

$= 2^{2014} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015} \cdot (3^4 + 2^2 \cdot 3^4 - 2) : 3^{2014} + 2015 =$ .... 1 punct

$= 2015 \cdot 10^{2014} + 2015 =$ .... 1 punct

$= 2015\underbrace{00 \cdots 00}_{2010\ cifre}2015$ .... 1 punct

Primele patru cifre sunt 2, 0, 1 și 5 iar numărul cifrelor egale cu 0 este egal cu 2012. …. 2 puncte

Problema 4.

a) $\overline{abcd} = 101 \cdot \overline{ab}$.. 1 punct

$100\overline{ab} + \overline{cd} = 101 \cdot \overline{ab}$.. 1 punct

$\overline{cd} = \overline{ab}$..0,5 puncte

$c = a$ și $d = b$ .... 0,5 puncte

b)Numărul numerelor naturale este egal cu numărul numerelor de două cifre, deci este egal cu 90. .... 2 puncte

c) $n = 100 \cdot q + r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 10$ .... 0,5 puncte

$101 \cdot q = 100 \cdot q + r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 10$ .... 0,5 puncte

$q = r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 10$ .... 0,5 puncte

$1010 \leq 101 \cdot r \leq 9999$

$1010 \leq n \leq 9999$ .... 0,5 puncte

Observații:

1. Există și numere naturale de trei cifre cu proprietatea că, dacă se elimină ultimele două cifre, atunci numărul se micșorează de 101 ori. Acestea sunt numerele naturale de forma: $\overline{a0a}$.
2. Dacă în enunțul problemei nu se punea condiția ca numărul natural să aibă cel puțin patru cifre, atunci ultima cerință trebuia să fie:
   c) Demonstrați că orice număr natural cu proprietatea din enunț are trei sau patru cifre.
   Demonstrație:

$n = 100 \cdot q + r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 1$ .... 0,5 puncte

$101 \cdot q = 100 \cdot q + r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 1$ .... 0,5 puncte

$q = r,\ 0 \leq r \leq 99,\ q \geq 1$ .... 0,5 puncte

$101 \leq 101 \cdot r \leq 9999$

$101 \leq n \leq 9999$ .... 0,5 puncte

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VI-a

Problema 1.

Soluție. a) $x = 2$ .... 2 puncte

b) $\frac{x-2}{3} + 3 + \frac{x-2}{5} + 5 + \frac{x-2}{7} + 7 + \cdots + \frac{x-2}{199} + 199 = 9999$............................. 2 puncte

$(x-2)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{199}\right) + 9999 = 9999$ .... 2 puncte

$x = 2$ .... 1 punct

Problema 2.

Soluție. a) $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$..2 puncte

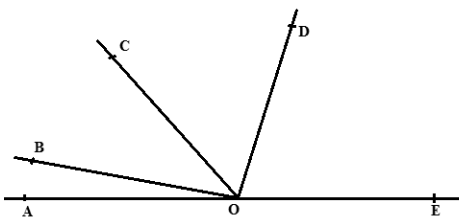
b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \vdots 3$ ....2 puncte

$r = 2$ .... 1 punct

c) $a = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ .... 1 punct

$b = 6^{3k+2} = 6^{3k}(1^3 + 2^3 + 3^3) = (6^k)^3 + (2 \cdot 6^k)^3 + (3 \cdot 6^k)^3$ .... 1 punct

Problema 3. Soluție. Cazul 1. $O \in (AE)$



$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle AOB) = x \\ m(\sphericalangle BOC) = 4x \\ m(\sphericalangle COD) = 5x \\ m(\sphericalangle DOE) = 8x \end{array}\right\}$ .... 2 puncte

$x + 4x + 5x + 8x = 180^\circ$ .... 1 punct

$x = 10^\circ$ .... 1 punct

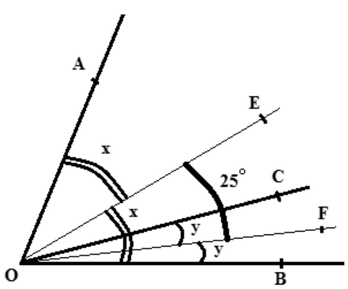
$m(\sphericalangle AOB) = 10^\circ$, $m(\sphericalangle BOC) = 40^\circ$

$m(\sphericalangle COD) = 50^\circ$, $m(\sphericalangle DOE) = 80^\circ$ .... 1 punct

Cazul 2. $A \in (OE)$ sau $E \in (OA)$ se acordă 2 puncte. În cazul în care un elev rezolvă doar cazul 2 se acordă 5 puncte pentru acest caz.

Problema 4.

Soluție.



a) Dacă sunt adiacente, atunci $m(\sphericalangle EOF) = 45^\circ$. Contradicție cu ipoteza. .... 3 puncte

b) Folosind notațiile de pe figură și ipoteza avem:

$x - y = 25^\circ; 2x + 2y = 90^\circ$ .... 2 puncte

Finalizare $m(\sphericalangle AOB) = 70^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC) = 20^\circ$

.... 2 puncte

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. a) $x = \frac{3+6\sqrt{18}}{2+3\sqrt{32}} = \frac{3+18\sqrt{2}}{2+12\sqrt{2}}$ …………………………………… 1 punct

$x = \frac{3\cdot(1+6\sqrt{2})}{2\cdot(1+6\sqrt{2})}$ …………………………………… 1 punct

$x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ …………………………………… 1 punct

b) $x = \frac{3+3a\sqrt{2}}{2+4b\sqrt{2}} \Leftrightarrow x(2+4b\sqrt{2}) = 3+3a\sqrt{2}$ …………………… 1 punct

$2x + 4bx\sqrt{2} = 3 + 3a\sqrt{2}$ …………………………………… 1 punct

$2x = 3$ și $4bx = 3a$ …………………………………… 1 punct

$a = 2b$ …………………………………… 1 punct

Problema 2.

Soluție. $\frac{10a+b}{110a+10b+c} = \frac{10b+c}{110b+10c+a} = \frac{10c+a}{110c+10a+b}$ …………………… 2 puncte

$\frac{10a+b}{110a+10b+c} = \frac{10b+c}{110b+10c+a} = \frac{10c+a}{110c+10a+b} = \frac{11(a+b+c)}{121(a+b+c)} = \frac{1}{11}$ ……………2 puncte

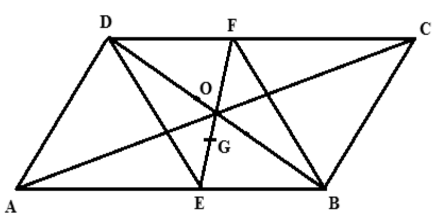
$110a + 11b = 110a + 10b + c$ …………………………… 1 punct

$b = c$ …………………………………… 1 punct

Analog $c = a \Longrightarrow a = b = c \Longrightarrow$ triunghi echilateral…………………… 1 punct

Problema 3.

Soluție.



a) $\Delta EAD \equiv \Delta FBC\ (ULU)$ …………………… 2 puncte

$\Rightarrow EA = ED = FB = FC$ ……………… 1 punct

$DF = EB,\ DF \parallel EB \Rightarrow DEBF$-paralelogram ... 1 p

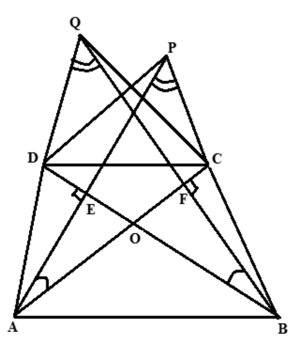
b) $\{O\} = AC \cap BD \cap EF$ …………………… 1 punct

$AO = OC;\ EO = OF$ …………………… 1 punct

$EG = 2GO \Rightarrow G$ centrul de greutate al triunghiului AEC …………………………… 1 punct

Problema 4.

Soluție.



a) $\sphericalangle OAE \equiv \sphericalangle OBF$ (au același complement) …….... 1 punct

b) $d(D, AB) = D(C, AB) \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DAB}$ ……. 2 puncte

c) $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC} \Rightarrow AE \cdot BD = BF \cdot AC$ ……..… 2 puncte

d) $2 \cdot |\ AE \cdot BD = BF \cdot AC \Rightarrow AP \cdot BD = BQ \cdot AC$ .1punct

$\Delta APC \sim \Delta BQD (LUL) \Rightarrow \sphericalangle APC \equiv \sphericalangle BQD$ …...…. 1punct

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VIII-a

Problema 1.

Soluție. $\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+7}=\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2^2}\geq 2$ ………………………………. 2 puncte

$\sqrt{y^2-6y+18}=\sqrt{(y-3)^2+3^2}\geq 3$ ………………………………… 2 puncte

$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+7}+\sqrt{y^2-6y+18}\geq 5$ ……………………………… 2 puncte

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=\sqrt{3}$ și $y=3$ ………………… 1 punct

Problema 2.

Soluție. a) Calcul $(x-1)\cdot(x+4k+2)=x^2+(4k+1)x-4k-2=E_{(x,k)}$…………1 punct

b) $x-1=0 \Longrightarrow x=1$ ……………………………………………… 1 punct

$x+4k+2=0$ nu are soluții ……………………………………… 1 punct

c) $\frac{x+k}{3k+2}\geq\frac{k+1}{x+3k+1}\Leftrightarrow(x+k)\cdot(x+3k+1)\geq(3k+2)\cdot(k+1)$ …………… 1 punct

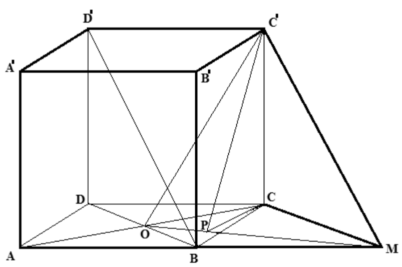
$(x+k)\cdot(x+3k+1)\geq(3k+2)\cdot(k+1)\Leftrightarrow E_{(x,k)}\geq 0$ adevărată ……… 1 punct

d)Folosirea inegalității c) pentru a demonstra unicitatea soluției ………… 1 punct

$x=1$ ………………………………………………………… 1 punct

Problema 3.

a)Ducem $CP\perp OM \Longrightarrow C'P\perp OM$ ……… 2 puncte



$\Delta MOC, m(\sphericalangle MCO)=90^{\circ}\Longrightarrow OM=\frac{a\sqrt{10}}{2}$..1 punct

$CP=\frac{a\sqrt{10}}{5}$; $C'P=\frac{a\sqrt{35}}{5}$ ……………… 1 punct

b) Unim pe C' cu M.

$BMC'D'$ paralelogram …………………… 1punct

$m(\sphericalangle(BD',C'O))=m(\sphericalangle(C'O,C'M))=\propto$ …. 1 p

Aplicarea metodei "*aria în două moduri*" în $\Delta C'OM$ $sin\propto=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ………… 1 punct

Problema 4.

a) Deoarece planul $(MNPQ)$ este paralel cu muchiile AB și CD, deducem foarte ușor că $\begin{cases}MN\parallel CD\\PQ\parallel CD\end{cases}$, de unde $MN\parallel PQ$. ………2 puncte

Analog avem $\begin{cases}MQ\parallel AB\\NP\parallel AB\end{cases}$, de unde $MQ\parallel PN$. Rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. …………… 1 punct

b) $\Delta BMN\sim\Delta BCD\Rightarrow\frac{MN}{CD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow MN=\frac{bx}{x+1}$ ……… 1 punct

$\Delta CMQ\sim\Delta CBA\Rightarrow\frac{MQ}{AB}=\frac{MC}{BC}\Rightarrow MQ=\frac{a}{x+1}$ ……..... 1 punct

Perimetrul paralelogramului $MNPQ$:

$\mathcal{P}=\frac{2bx+2a}{x+1}=2b+\frac{2a-2b}{x+1}$ ……………………….... 1 punct

Deoarece $x>0$ rezultă $\frac{2a-2b}{x+1}<2a-2b$, de unde $\mathcal{P}<2a$. Cum $\mathcal{P}$ trebuie să fie maxim și exprimat printr-un număr întreg, rezultă $\mathcal{P}=2a-1$. Se obține $\frac{2bx+2a}{x+1}=2a-1$, iar de aici, prin calcul rezultă $x=\frac{1}{2a-2b-1}$ ………………1 punct