BISTRIȚA - NĂSĂUD **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ- Clasa a V-a

28 februarie 2015

1. **La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 118 puncte ?**

2. **Se consideră 5 numere naturale cu media aritmetică egală cu 24. Împărțind pe rând primul număr la suma dintre al doilea și al treilea, apoi al doilea număr la suma dintre al treilea și al patrulea, iar la final pe al treilea la suma dintre al patrulea și al cincilea se obține de fiecare dată câtul 2 și restul 1. Știind că ultimele două numere sunt consecutive, aflați numerele.**

G.M. Supliment cu exerciții Martie 2014; S:E 14.84

3. **Se dau mulțimile A, B, C, D cu proprietatea că sunt disjuncte oricare două între ele, oricare trei între ele și toate patru, astfel încât $card\ A = a^{5n+3}, card\ B = a^{5n+2}, card\ C = a^{5n+1}, card\ D = a^{5n},\ a, n \in N^*$**
Să se demonstreze că $card\ (A \cup B \cup C \cup D) + 4$ este număr par.

Clasa a VI-a

Subiectul I

Determinaţi numerele naturale a şi b ştiind că sunt mai mari decât 30, au produsul egal cu 3888 şi cel mai mare divizor comun al lor este 18.

G.M.- Supliment cu exerciţii; Noiembrie 2014

Subiectul II

a) Scrieţi ca fracţie ireductibilă suma: $S = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2015}$.

b) Arătaţi că: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \dots + \frac{1}{2+4+6+\dots+4028}\right) = \frac{1}{2015}$

Subiectul III

Dreptele *AB* şi *CD* se intersectează în punctul *O*, iar m($\sphericalangle$ AOD) < 90° .
Fie [OM, [ON şi [OP bisectoarele interioare unghiurilor $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle MOB$ şi respectiv $\sphericalangle NOC$.

a) Dacă m($\sphericalangle$ AOD)=82°, să se determine măsurile unghiurilor: $\sphericalangle MOB, \sphericalangle NOC$ şi $\sphericalangle NOP$.

b) Dacă m($\sphericalangle$MOP)= 139°, să se determine măsura unghiului $\sphericalangle$ AOD.

BISTRIȚA - NĂSĂUD OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ-28.02.2015

Clasa a VII-a

1. Se dau numerele:

$x=2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot2016}\right)$

$y=\left(\frac{1008}{3-\sqrt{2}}+\frac{2016}{4+\sqrt{2}}\right)^{-2}\cdot\frac{1008^3}{44-\sqrt{2015}}$

$z=\sqrt{\sqrt{2017}\cdot\left(\sqrt{2017}-\sqrt{2015}\right)-\sqrt{2015}\cdot\left(\sqrt{2017}-\sqrt{2015}\right)}-\sqrt{\left(44-\sqrt{2017}\right)^2}$

Arătați că xyz este număr natural.

2. Fie a, b, c, d, x, y, z, t numere reale astfel încât:

$x=bcd+\frac{1}{a},\quad y=acd+\frac{1}{b},\quad z=abd+\frac{1}{c},\quad t=abc+\frac{1}{d}$

și $ax+by+cz+dt=1$.

Să se calculeze: abcd și xyzt. GM, Supliment cu exerciții, octombrie 2014

3. În triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, iar M este mijlocul laturii AB. Paralela prin M la înălțimea AD a triunghiului, intersectează dreapta AC în punctul E. Dacă ΔAME este echilateral, se cere să:

a) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Demonstrați că AEMD este romb.

c) Arătați că AE = $\frac{1}{3}$CE.

d) Arătați că $S_{AEMD}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.

Clasa a VIII-a

1. Se dau numerele $a=\sqrt{1+3+5+7+9+11}-\sqrt{1+3+5+7+9}$, $b=\sqrt{1+3+5+...+4029}$ și $c=\sqrt{1+3+5+...+4027}$. Să se calculeze:

a) a^{2015}

b) $(b-c)^{2015}$

c) $(b+c)^{a-1}$

2. Determinaţi numerele reale x,y,z pentru care

$$x+y+z-21=2\sqrt{x-4}+4\sqrt{y-9}+6\sqrt{z-22}.$$ SGM nr. 11/2014

3. Fie trapezul $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB>CD$, $AD=DC=a\sqrt{2}$ şi $BC=AC=2a$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara în D pe care se ia punctul M astfel încât $MD=a\sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) distanţa de la punctul M la AB;

b) aria triunghiului MAB;

c) distanţa de la punctul M la AC;

d) măsura unghiului dintre planele (MAC) şi (ABC).

Clasa a V-a
Barem de corectare

1. Presupunem că elevul a răspuns corect la toate întrebările ……………………………………..1p

a) Câte puncte ar fi obținut presupunerii?
$30 \cdot 5 = 150$ de puncte ………………………………………………………...1p

b) Care este diferența dintre punctajul obținut și cel real?
$150 - 118 = 32$ de puncte
……………………………………………………...1p

c) Care este plusul de puncte acordat pentru un răspuns greșit?
$3 + 5 = 8$ puncte
……………………………………………………………..1p

d) Care este numărul de răspunsuri greșite?
$32 : 8 = 4$ răspunsuri greșite
……………………………………………………...1p

e) Care este numărul de răspunsuri corecte?
$30 - 4 = 26$
……………………………………………………………1p
Verificare : $26 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 130 - 12 = 118$ puncte
………………………………..1p

2. Notăm primul număr cu "x" , al doilea număr cu "y" , al treilea cu "z" , al patrulea cu "t", al cincilea cu "u".
Avem $x + y + z + t + u =$
120...(0,5p)
$x : (y + z) = 2 \ rest \ 1; \ \ y : (z + t) = 2 \ rest \ 1; \ \ z : (t + u) = 2 \ rest \ 1.$
............................(1p)
Folosim Teorema împărțirii cu rest: $D = Î \cdot C + R, \ 0 \leq R < Î$
$x = 2 \cdot (y + z) + 1, \ y = 2 \cdot (z + t) + 1, \ z = 2 \cdot (t + u) + 1, \ u = t +$
1............................(1p)
$z = 2 \cdot (t + t + 1) + 1 = 2 \cdot (2t + 1) + 1 = 4t + 3 \Rightarrow z = 4t + 3$
...................................(0,5p)
$y = 2z + 2t + 1 = 2 \cdot (4t + 3) + 2t + 1 = 10t + 7 \Rightarrow y = 10t + 7$.................................(0,5p)
$x = 2y + 2z + 1 = 2 \cdot (10t + 7) + 2z + 1 = 20t + 15 + 2z \Rightarrow x = 20t + 2 \cdot (4t + 3) +$
$15 = 20t + 8t + 6 + 15 = 28t + 21 \Rightarrow x = 28t + 21$...(0,5p)
$x + y + z + t + u = 120 \Leftrightarrow 28t + 21 + 10t + 7 + 4t + 3 + t + t + 1 = 120$.................(0,5p)
$44t + 32 = 120 \Leftrightarrow 44t = 120 - 32 \Leftrightarrow 44t = 88 \Leftrightarrow t = 2$...(0,5p)
$u = t + 1 \Rightarrow u = 3; z = 4t + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11 \Rightarrow z =$
11..(1p)
$y = 10t + 7 = 10 \cdot 2 + 7 = 27 \Rightarrow y = 27; x = 28t + 21 = 56 + 21 = 77 \Rightarrow x =$
77……..(1p)

3. Deoarece $A \cap B = \emptyset, \ A \cap C = \emptyset, \ A \cap D = \emptyset, \ B \cap C = \emptyset, \ B \cap D = \emptyset, \ C \cap D = \emptyset, \ A \cap B \cap C = \emptyset, \ A \cap B \cap D = \emptyset, \ A \cap C \cap D = \emptyset, \ B \cap C \cap D = \emptyset, \ A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$ ....(2p)
Rezultă: $card(A \cup B \cup C \cup D) = card\, A + card\, B + card\, C + card\, D = a^{5n+3} + a^{5n+2} + a^{5n+1} + a^{5n} = a^{5n+2} \cdot (a + 1) + a^{5n} \cdot (a + 1) = (a + 1)(a^{5n+2} + a^{5n}) = (a + 1) \cdot a^{5n} \cdot (a^2 + 1) = a(a + 1) \cdot a^{5n-1} \cdot (a^2 + 1) = par, \ pentru \ că \ a(a + 1) este \ număr \ par$.........(4p)
Rezultă că, $card(A \cup B \cup C \cup D) + 4 \ este \ număr \ par$...(1p)

Clasa a VI-a
Barem de corectare

Subiectul I

Din (a;b) =18 rezultă a=18x ; b=18y; (x;y)=1..2 p

18x·18y =3888 rezultă xy =12 ....1 p

a>30; b>30 rezultă x>1; y>1...1 p

(x;y) ∈ {((3; 4), (4; 3)} ....2 p

(a;b) ∈ {(54;72), (72;54)}..1 p

Subiectul II

a) $S= \frac{1}{\frac{2\cdot3}{2}} + \frac{1}{\frac{3\cdot4}{2}} + ... + \frac{1}{\frac{2015\cdot2016}{2}}$ ....1 p

$S= 2(\frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{2015\cdot2016})$ ....1 p

$S= \frac{2014}{2016} = \frac{1007}{1008}$..1 p

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} = \frac{2}{3}$ ....1 P

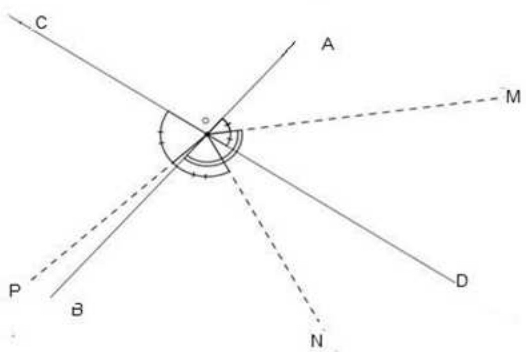
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} = \frac{3}{4}$ ....1 p

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \cdots + \frac{1}{2+4+6+\cdots+4028} = \frac{2014}{2015}$ ....1 p

$S= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2014}{2015} = \frac{1}{2015}$ ....1 p

Subiectul III

a)



[OM bisectoarea $\sphericalangle AOD$ => m($\sphericalangle MOD$) = m($\sphericalangle MOA$) =41° şi

m($\sphericalangle MOB$) = 180° − m($\sphericalangle AOM$) = 139°..1p

m($\sphericalangle NOC$)= m($\sphericalangle NOB$)+m($\sphericalangle BOC$)= 69°30′+82°

m($\sphericalangle NOC$)=151°30′..1p

m($\sphericalangle NOP$)=75°45′ 1p

b)

Fie m($\sphericalangle AOD$)= x

m($\sphericalangle MON$) = m($\sphericalangle NOB$) =90°- $\frac{x}{4}$...1 p

m(($\sphericalangle$NOP) = 45° + $\frac{3x}{8}$ ....1 p

m($\sphericalangle$MOP) = m($\sphericalangle NOP$) + m($\sphericalangle MON$)

45° + $\frac{3x}{8}$ +90° - $\frac{x}{4}$ = 139°...1 p

$x = 32^\circ$ rezultă m($\sphericalangle AOD$)=32°...1 p

Clasa a VII-a
Barem de corectare

1	x $=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)$ x= $\frac{2015}{1008}$	1 punct 1 punct
	y= $\left(\frac{1008}{3-\sqrt{2}}+\frac{2016}{4+\sqrt{2}}\right)^{-2}\cdot\frac{1008^3}{44-\sqrt{2015}}=\frac{1008}{44-\sqrt{2015}}$	2 puncte
	z= $44-\sqrt{2015}$	2 puncte
	$xyz=2015\in N$	1 punct
2	ax=abcd+1 by=abcd+1 cz=abcd+1 dt=abcd+1	2 puncte
	4abcd=ax+by+cz+dt-4	1 punct
	abcd= - $\frac{3}{4}$	1 punct
	abcdxyzt= $(abcd+1)^4$	2 puncte
	xyzt = - $\frac{1}{192}$	1 punct
3	Desenul	1 punct
	a) m(∠A) $=120^0$; m(∠B)= m(∠C) $=30^0$	1 punct
	b) D mijlocul laturii	1 punct
	BC, $[MD]$ *linie mijlocie în triunghiul ABC* justificarea faptului că AEMD este romb	1 punct
	c) AE=AM= $\frac{1}{2}$ AB= $\frac{1}{2}AC$	1 punct
	CE=AE +AC=AE +2AE=3AE	1 punct
	d) $S_{AEMD}=2S_{ADM}=S_{ADB}=\frac{1}{2}S_{ABC}$	1 punct

Clasa a VIII-a
Barem de corectare

1. a) $1+3+5+7+9+11=1+2+3+4+...+11-(2+4+...+10)$ $=\frac{11\cdot 12}{2}-2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}=6^2$, ……………1p

$1+3+5+7+9=1+2+3+4+...+9-(2+4+...+8)=5^2$, $a=\sqrt{6^2}-\sqrt{5^2}=6-5=1$ ……………1p

$a^{2015}=1^{2015}=1$ ……………………………………………………………………………1p

b) folosind a) obţinem $1+3+5+...+4029=1+2+3+4+...+4029-(2+4+...+4028)=2015^2$, deci

$b=\sqrt{2015^2}=2015$ ……………………………………………………………………1p

analog $c=\sqrt{2014^2}=2014$ ……………………………………………………………………1p

$(b-c)^{2015}=1^{2015}=1$ ……………………………………………………………………1p

c) $(b+c)^{a-1}=4029^0=1$ ……………………………………………………………………1p

2. căutăm pătratele perfecte care conţin cei trei radicali

$(x-4)-2\sqrt{x-4}+1=(\sqrt{x-4}-1)^2$ ……………………………………………………1p

$(y-9)-2\cdot 2\sqrt{y-9}+4=(\sqrt{y-9}-2)^2$ ……………………………………………………1p

$(z-22)-2\cdot 3\sqrt{z-22}+9=(\sqrt{z-22}-3)^2$ ……………………………………………………1p

$-4+1-9+4-22+9=-21$, obţinem sumă de pătrate perfecte egală cu zero $\Leftrightarrow$ fiecare pătrat este egal cu zero……………………………………………………………………………1p

$\Rightarrow$ $\sqrt{x-4}=1$, $\sqrt{y-9}=2$, $\sqrt{z-22}=3$ ……………………………………………………1p

$\Rightarrow$ $x-4=1$, $y-9=4$, $z-22=9$ ……………………………………………………1p

$\Rightarrow$ $x=5$, $y=13$, $z=31$ ……………………………………………………1p

3. a) în ΔADC aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora şi obţinem triunghi dreptunghic în D, deci trapezul este dreptunghic ……………………………………………………………………1p

din teorema celor trei perpendiculare obţinem $d(M,AB)=MA$, $MA=a\sqrt{5}$ ……………………1p

b) fie $CE\perp AB$, $E\in[AB]$; obţinem cu teorema lui Pitagora $BE=a\sqrt{2}$, deci $AB=2a\sqrt{2}$ ……..1p

ΔMAB este dreptunghic, obţinem $A=a^2\sqrt{10}$ ……………………………………………………1p

c) fie $DP\perp AC$, $P\in[AC]$, $AECD$ pătrat $\Rightarrow DP=a$ ……………………………………………1p

din teorema celor trei perpendiculare obţinem $d(M,AC)=MP$, $MP=2a$ ……………………………1p

d) unghiul căutat este $\sphericalangle MPD$, $\sin(\sphericalangle MPD)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle MPD)=60^0$ ……………………………1p