Bihor # OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. La un concurs de matematică sunt propuse 30 de exerciţii. Pentru fiecare exerciţiu rezolvat corect elevul primeşte 10 puncte, iar pentru fiecare exerciţiu rezolvat greşit este penalizat cu 10 puncte (se scad 10 puncte). Dragoş a rezolvat toate exerciţiile şi a primit 80 de puncte.

a) Câte exerciţii a rezolvat corect Dragoş?
b) Câte exerciţii a rezolvat greşit Dragoş?
c) Câte exerciţii ar mai fi trebuit să rezolve corect Dragoş, pentru ca în final el să obţină 120 puncte?
d) Care a fost punctajul maxim care se putea obţine la concursul de matematică?

PROBLEMA 2. Fie numerele $x = 1+2+2^2+\ldots+2^{2014}$ şi $y = (27^3 : 3^8+10^{10} : 10^8-72)^{403}-2015^0$.

a) Arătaţi că $x = 2^{2015} - 1$;
b) Comparaţi numerele x şi y;
c) Aflaţi ultima cifră a numărului $x + y$.

PROBLEMA 3. Determinaţi câte numere de forma $\overline{abc}$, cu cifre distincte, verifică relaţia:

$$\overline{aba} - \overline{aaa} + 17\,(b - a) = c^3.$$

PROBLEMA 4. Se consideră şirul cu termenii: $1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17, 20, \ldots$

a) Scrieţi următorii 2 termeni ai şirului;
b) Determinaţi al 2015-lea termen al şirului;
c) Calculaţi suma termenilor mai mici sau egali cu 80 din şir.

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. a) Să se determine valoarea numărului x, dacă

$$\frac{2014}{2015\cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1} = \frac{x}{2014\cdot 2015}.$$

b) Folosind inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$, oricare ar fi a şi b pozitive şi diferite, să se arate că

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > \frac{13}{7}.$$

PROBLEMA 2. Se consideră numerele naturale $a = 3n + 7$, $b = 2n + 5$ şi $c = n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că numerele a şi b sunt prime între ele, iar numărul $[a, b] + [a, c]$ este pătrat perfect. ($[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y)

PROBLEMA 3. Se dau punctele coliniare $A, O,$ şi B, cu $O \in (AB)$. De aceeaşi parte a dreptei AB se consideră punctele C şi D, astfel încât unghiurile $\widehat{AOC}$ şi $\widehat{COD}$ să fie adiacente. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ şi $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Se ştie că $m\left(\widehat{MOD}\right) = 105^\circ$ şi $m\left(\widehat{NOC}\right) = 120^\circ$.

a) Arătaţi ca unghiul $\widehat{COD}$ este drept.
b) Dacă în interiorul unghiului $\widehat{COD}$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule, demonstraţi că printre acestea există cel puţin două unghiuri congruente.

PROBLEMA 4. a) Considerăm punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2015}$ (în această ordine), astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm,..., $A_{2014}A_{2015} = 2015$ cm. Să se calculeze distanţa dintre punctele A_{1000} şi A_{2015}.

b) Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte, astfel încât oricare trei dintre punctele date sunt necoliniare. Colorăm fiecare dintre segmentele determinate de ele, fie cu portocaliu, fie cu violet, la întâmplare. Demonstraţi că există un triunghi cu vârfurile în trei dintre cele şase puncte, care are toate laturile de aceeaşi culoare.

Bihor OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. a) Să se arate că numărul $A = \sqrt{2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2}$ este iraţional pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se demonstreze că dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x + y + z = 1344$, atunci
$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leqslant 2016.$$

PROBLEMA 2. a) Să se arate că $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
b) Determinaţi numerele naturale a, b şi numărul natural prim p, ştiind că $a^2 + a = p^{2^b} + 2$.

PROBLEMA 3. Fie ABCD un paralelogram cu $AB = n \cdot AD$, unde $n \in \mathbb{R}$, $n > 2$. Bisectorele unghiurilor paralelogramului se intersectează astfel: bisectoarea unghiului A se intersectează cu bisectoarea unghiului B în punctul R, bisectoarea unghiului B cu bisectoarea unghiului C în S, bisectoarea unghiului C cu bisectoarea unghiului D în T şi bisectoarea unghiului D cu bisectoarea unghiului A în Q.
a) Demonstraţi că $RSTQ$ este dreptunghi;
b) Dacă $AB \cap DT = \{P\}$, demonstraţi că $\dfrac{A_{ADP}}{A_{ARB}} = \dfrac{2}{n^2}$;
c) Demonstraţi că dreptele RT, AC şi DB sunt concurente.

PROBLEMA 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[BD$, $[CE$ bisectoarele sale ($D \in AC$, $E \in AB$). Se notează cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F, respectiv G, proiecţiile punctelor D şi E pe dreapta BC. Să se determine măsura unghiului FIG.

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. a) Descompuneţi în factori $3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 - y^2$.
b) Aflaţi minimul şi maximul expresiei $\dfrac{x+1}{|x+1|} + \dfrac{|x+2|}{x+2} - \dfrac{x+3}{|x+3|}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$.

PROBLEMA 2. Fie $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{\dfrac{a+5}{a+12}}, \sqrt{\dfrac{b+3}{b+14}} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că $a^{2015} + b^{2015}$ nu se divide cu 2015.

PROBLEMA 3. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul S exterior planului său aşa încât $SA = SB = SC = SD$. Dacă $AB = 12$ cm, $AP \perp CS$, $P \in (SC)$ şi $AP = SO$, unde O este centrul pătratului, se cer:
a) Măsura unghiului format de dreptele SC şi BD;
b) Distanţa de la punctul A la planul (BPD);
c) Distanţa de la punctul B la dreapta de intersecţie a planelor (BPD) şi (ADS).

PROBLEMA 4. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, D este ortocentrul triunghiului BCD, iar picioarele perpendicularelor din D şi A pe BC coincid, notând cu E piciorul perpendicularei din A pe BC, să se arate că $HE \cdot AE = DE^2$.

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1.

($2p$) a) Dragoş a rezolvat corect 19 exerciţii;

($2p$) b) Dragoş a rezolvat greşit 11 exerciţii;

($2p$) c) Pentru a obţine 120 de puncte, Dragoş ar fi trebuit să rezolve corect încă 2 exerciţii;

($1p$) d) Punctajul maxim care se putea obţine este $10 \times 30 = 300$ (puncte).

PROBLEMA 2.

($1p$) a) $x = 2x - x = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014} + 2^{2015}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2014}) = 2^{2015} - 1$;

($1p$) b) Avem $y = 31^{403} - 1$

($1p$) şi $x = 32^{403} - 1$

($1p$) deci $x > y$;

($1p$) c) Deoarece x este de forma $2^{4k+3} - 1$ ($k \in \mathbb{N}$), ultima cifră a lui x este $8 - 1 = 7$

($1p$) Ultima cifră a lui y este $1 - 1 = 0$

($1p$) Deci, ultima cifră a lui $x + y$ este 7

PROBLEMA 3.

($1p$) Observăm că $b > a > 0$

($2p$) Relaţia din enunţ este echivalentă cu: $10b - 10a + 17(b - a) = c^3$

($1p$) De unde avem: $27(b - a) = c^3 \Rightarrow b - a$ este cub perfect

($2p$) Dar, $b - a < 9 \Rightarrow b - a \in \{1, 8\} \Rightarrow c^3 \in \{3^3, 6^3\}$

($1p$) Astfel, $\overline{abc} \in \{123, 453, 563, 673, 783, 893, 196\}$, adică sunt 7 numere.

PROBLEMA 4.

($2p$) Se observă că

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	...
$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3 - 1$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5 - 1$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7 - 1$	$2 \cdot 8$	...

adică, termenii şirului sunt de forma:
- dacă n este impar, atunci $T_n = 2n - 1$
- dacă n este par, atunci $T_n = 2n$

($2p$) a) Următorii 2 termeni ai şirului sunt: 21 şi 24

($1p$) b) Termenul al 2015-lea este $T_{2015} = 2 \cdot 2015 - 1 = 4029$

($2p$) c) Numărul 80 este termen al şirului, $T_{40} = 2 \cdot 40 = 80$, iar suma cerută este:

$$S = 1 + 4 + 5 + 8 + \cdots + 77 + 80 = (1 + 5 + 9 + \cdots + 77) + (4 + 8 + \cdots + 80) =$$
$$= 78 \cdot 10 + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) = 780 + 2 \cdot 20 \cdot 21 = 1620$$

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) $2015 \cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1 = 2014 \cdot 2014$

(2p) Soluţia este $x = 2015$

(1p) b) Avem $1 + \frac{1}{500} > \frac{4}{501}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{499} > \frac{4}{501}, \ldots, \frac{1}{250} + \frac{1}{251} > \frac{4}{501}$

(1p) de unde, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > 250 \cdot \frac{4}{501} = \frac{1000}{501}$

(1p) Deoarece $\frac{1000}{501} > \frac{13}{7}$, obţinem inegalitatea cerută.

PROBLEMA 2.

(3p) Se arată că $(3n+7, 2n-5) = 1$

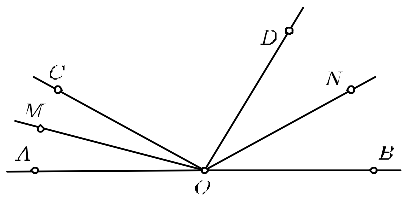
(1p) şi $(3n+7; n+2) = 1$

(1p) Utilizarea formulei $x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$

(1p) Astfel, $[a, b] = a \cdot b$ şi $[a, c] = a \cdot c$

(1p) de unde, $[a, b] + [a, c] = a \cdot b + a \cdot c = (3n+7)^2$

PROBLEMA 3.



(1p) a) Avem $m\left(\widehat{MOC}\right) + m\left(\widehat{COD}\right) = 105°$,
$m\left(\widehat{COD}\right) + m\left(\widehat{DON}\right) = 120°$

(1p) şi $m\left(\widehat{AOC}\right) + m\left(\widehat{COD}\right) + m\left(\widehat{DOB}\right) = 180°$

(2p) Dacă notăm: $m\left(\widehat{AOM}\right) = m\left(\widehat{MOC}\right) = a$, $m\left(\widehat{BON}\right) = m\left(\widehat{DON}\right) = c$ şi $m\left(\widehat{COD}\right) = b$
avem: $a + b = 105°$, $b + c = 120°$ şi $2a + b + 2c = 180° \Rightarrow a = 15°$, $b = 90°$ şi $c = 30°$

(1p) b) Suma măsurilor celor 13 unghiuri cu interioarele disjuncte este egală cu 90°

(1p) Presupunem că cele 13 măsuri sunt numere naturale nenule diferite. Astfel, cea mai mică valoare a sumei măsurilor celor 13 unghiuri ar fi $1° + 2° + 3° + \cdots + 13° = \frac{13 \cdot 14°}{2} = 91°$

(1p) Contradicţie cu ipoteza. Deci, cel puţin două unghiuri au măsurile egale.

PROBLEMA 4.

(1p) a) $A_{1000}A_{2015} = A_{1000}A_{1001} + A_{1001}A_{1002} + \ldots + A_{2014}A_{2015}$

(1p) $A_{1000}A_{2015} = 1001 \text{ cm} + 1002 \text{ cm} + \ldots + 2015 \text{ cm}$

(2p) $A_{1000}A_{2015} = 1530\,620 \text{ cm}$

(1p) b) Considerăm cele 5 segmente cu un capăt în punctul A. Conform principiului cutiei, există printre acestea măcar trei de aceeaşi culoare.

(1p) Presupunem, de exemplu, că segmentele AB, AC şi AD sunt toate trei de aceeaşi culoare, şi anume, violet.
Dacă o latură a triunghiului BCD este violet, ea completează cu două dintre segmentele anterioare un triunghi violet.

(1p) În caz contrar, triunghiul BCD este portocaliu şi demonstraţia este completă.

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

(3p) a) Ultima cifră a numărului $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ este $\begin{cases} 3, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 7, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

(1p) Deci $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ nu este pătrat perfect, de unde $A \notin \mathbb{Q}$

(2p) b) Avem: $\sqrt{x(y+z)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2}$, $\sqrt{y(x+z)} \leqslant \dfrac{y+(x+z)}{2}$, $\sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{z+(x+y)}{2}$

(1p) Deci: $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} - \sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2} + \dfrac{y+(x+z)}{2} + \dfrac{z+(x-y)}{2} = \dfrac{3(x+y+z)}{2} = \dfrac{3 \cdot 1344}{2} = 2016$

PROBLEMA 2.

(2p) a) Se arată că $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

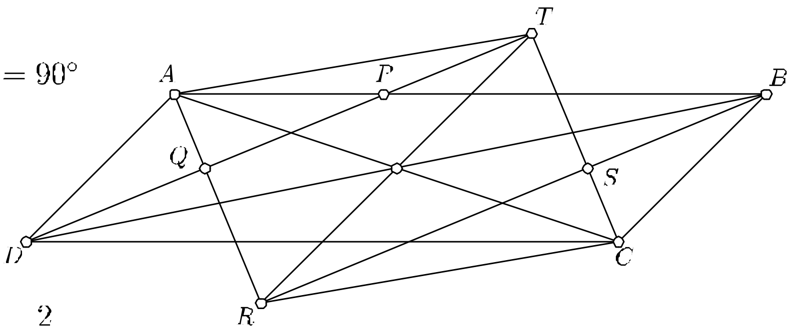
(1p) b) Deoarece numărul $a^2 - a = a(a+1)$ este par, rezultă că şi numărul $p^{2^b} + 2$ este par. Deci $p = 2$, iar relaţia din enunţ devine: $a^2 + a - 2 = 2^{2^b} \iff (a-1)(a+2) = 2^{2^b}$

(1p) Deoarece membrul drept este par, iar numerele $a-1$ şi $a+2$ au parităţi diferite, singurele posibilităţi sunt: $\begin{cases} a-1=1 \\ a+2=2^{2^b} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-1=2^{2^b} \\ a+2=1 \end{cases}$

(1p) Pentru $a+2=1$, nu avem soluţii

(2p) Pentru $\begin{cases} a-1=1 \\ a+2=2^{2^b} \end{cases}$ se obţine $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ Soluţia $(p, a, b) = (2, 2, 1)$

PROBLEMA 3.



(1p) a) $\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{A}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{D}\right) = 90°$; rezultă $\mathrm{m}\left(\widehat{TQR}\right) = 90°$

(1p) se demonstrează că patrulaterul $RSTQ$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi

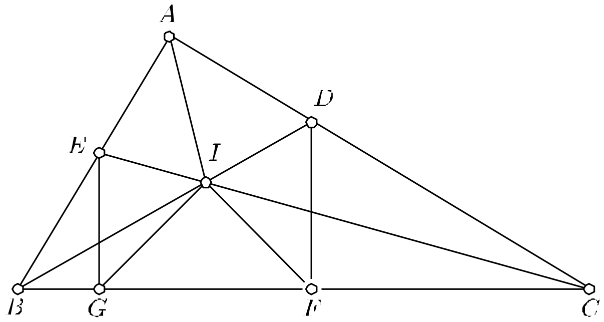
(1p) b) $\Delta AQD \sim \Delta ARB \Rightarrow \dfrac{A_{AQD}}{A_{ARB}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{n^2}$

(1p) $\Delta AQD \equiv \Delta AQP \Rightarrow A_{ADP} = 2 \cdot A_{AQD} \Rightarrow \dfrac{A_{ADP}}{A_{ARB}} = \dfrac{2}{n^2}$

(2p) c) Se demonstrează că $ATCR$ este paralelogram, de unde rezultă că $[RT]$ şi $[AC]$ au acelaşi mijloc

(1p) În paralelogramul $ABCD$, diagonalele AC şi BD au acelaşi mijloc, de unde rezultă concurenţa dreptelor RT, AC şi DB

PROBLEMA 4.



(1p) Deoarece $[BI$ şi $[BI$ sunt bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow$ $[AI$ este bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BAI}) = 45°$

(2p) Deoarece $[BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, rezultă că $DA = DF$ şi $AB = BF$

(2p) $\Delta AIB \equiv \Delta FIB \Rightarrow \widehat{BAI} \equiv \widehat{BFI} \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BFI}) = 45°$

(2p) Analog se arată că $\mathrm{m}(\widehat{FGI}) = 45°$ şi din ΔFIG avem $\mathrm{m}(\widehat{FIG}) = 90°$

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII a

PROBLEMA 1.

(2p) a) $E = 3x^2 + 4\sqrt{6}x - 8 - y^2 = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)^2 - y^2$;

(2p) Finalizare, $E = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - y\right)\left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + y\right)$.

(1p) b) Fracţiile pot lua doar valorile 1 sau -1

(1p) Minimul expresiei este -3

(1p) Maximul expresiei este 3

PROBLEMA 2.

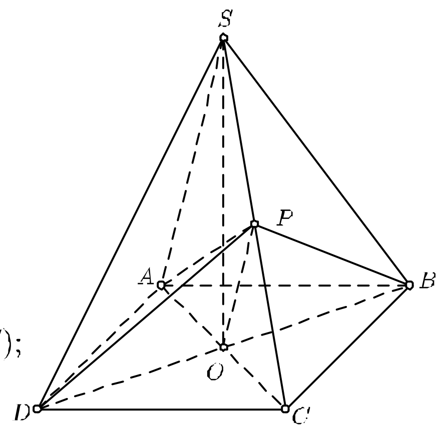
(2p) $\sqrt{\frac{a+5}{a+12}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + 5 = kx^2$ şi $a + 12 = ky^2$ cu x şi y prime între ele şi $k \in \mathbb{N}$.

(1p) Avem $k(y^2 - x^2) = 7 \Rightarrow k(y - x)(y + x) = 7$ de unde, singura soluţie este $k = 1, y = 4$ şi $x = 3 \Rightarrow a = 4$.

(3p) Analog se găseşte că $b = 22$.

(1p) Ultima cifră a numărului $a^{2015} + b^{2015}$ este 2, de unde rezultă cerinţa

PROBLEMA 3.



(2p) a) $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BD$, $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow m\left(\widehat{BD, SC}\right) = 90^\circ$

(1p) b) Triunghiurile ΔSAC şi ΔOPC sunt echilaterale

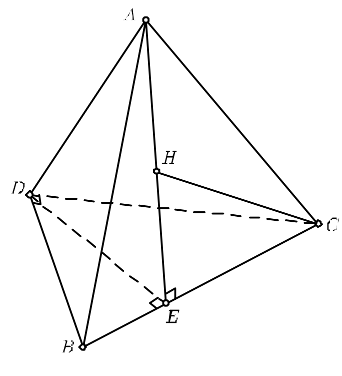
(1p) $d(A, (BPD)) = d(C, (BPD)) = d(C, OP) = 3\sqrt{6}$ cm

(3p) c) OP este linie mijlocie în $\Delta SAC \Rightarrow OP \parallel AS \Rightarrow OP \parallel (ADS)$;

$OP \subset (BPD) \Rightarrow OP \parallel (ADS) \cap (BPD)$;

$BD \perp OP \Rightarrow BD \perp (ADS) \cap (BPD) \Rightarrow d(B, (ADS) \cap (BPD)) = BD = 12\sqrt{2}$cm

PROBLEMA 4.



(1p) ΔBCD este dreptunghic în D

(1p) Deoarece $DE \perp BC$, din teorema înălţimii, rezultă c
ă $DE^2 = BE \cdot CE$

(2p) $\Delta CEH \sim \Delta AEB$

(2p) Rezultă $\frac{CE}{AE} = \frac{HE}{BE} \Rightarrow BE \cdot CE = HE \cdot AE$

(1p) Deci, $HE \cdot AE = DE^2$