Botosani **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a V – a

SUBIECTUL I (7 p)

Determinați numărul natural n de patru cifre care are proprietatea că, dacă îi eliminăm cifra sutelor, din numărul rezultat scădem 2, apoi diferența obținută o înmulțim cu 19 și noul rezultat îl împărțim la 2, obținem n .

Gazeta Matematică 5/2014

SUBIECTUL II (7 p)

Se dau numerele :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1) + n$ şi

$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (n - 1) + n$, unde n este un număr natural impar .

- **a)** Să se determine numărul n știind că $S_1 = 2015 \cdot S_2$;
- **b)** Care este cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit $S_1 + S_2$, astfel încât să se obțină un pătrat perfect ;
- **c)** Aflați numerele naturale n și m, cu n impar, astfel încât $S_1 - S_2 = 2^m$.

SUBIECTUL III (7 p)

Determinați numerele naturale a, b, c știind că :

$3a + 2b + c = 598$; $a + 2b + 3c = 602$ și $a < b < c$.

SUBIECTUL IV (7 p)

a) Demonstrați că $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22}$

b) Aflați care dintre numerele $a = 2^{23} \cdot 5^{35}$ și $b = 3^{22} \cdot 7^{24}$ este mai mare .

Notă : Timp de lucru : **2 ore**

Botosani OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a VI – a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Să se calculeze:

$$\left[2,1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{5}\right)^2-9\cdot 2014^0$$

b) Să se determine numerele naturale a şi b, pentru care sunt satisfăcute relaţiile: $(a,b)=15$ şi $a+b=240$.

SUBIECTUL II (7 p)

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, iar M şi N două puncte pe dreapta BC astfel încât B să fie între M și C, iar C între B și N. Știind că $AM=AN$, să se demonstreze că:

a) $BM=CN$

b) $PN=QM$, unde P şi Q sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB],[AC]$

c) $PM=QN$

d) Dacă $MQ\cap NP=\{O\}$, să se arate că punctul O aparţine bisectoarei unghiului MAN.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie numerele raționale :

$$A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2013}}+\frac{1}{2^{2014}}\right)\cdot\left(1+1+2+2^2+\cdots+2^{2013}\right) \text{ și}$$

$$B=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{2013}+2^{2014}+2^{2015}}{1+2^2+2^4+\cdots+2^{2014}}-2.$$ Să se calculeze B + A - 2^{2015}.

SUBIECTUL IV (7 p)

Determinați numere prime p pentru care p+2, p^2+4, p^3+2 și p^4-2 sunt simultan numere prime.

GM. Nr. 4/2013

NOTĂ: Timp de lucru – **2 ore**

Botosani **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ

22 februarie 2015

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Dacă x și y sunt numere raționale cu proprietatea că $x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=0$, demonstrați că x = y = 0.

b) Determinați toate perechile de numere raționale (a, b) care verifică egalitatea $\sqrt{2(a+1)^2-2\sqrt{2}}=|b+1|\sqrt{3}-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$.

SUBIECTUL II (7 p)

a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}, \forall n,k\in\mathbb{N}$.

b) Se dau numerele :

$$a=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}$$

$și$ b=3+8+13+…+10018. Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{15\cdot a+\frac{b}{1002}}$.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie ABC un triunghi oarecare, iar M și D mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Dacă E∈(AD) astfel încât AD=4·ED, iar {N}=ME∩BC, să se demonstreze că:

a) [ME] ≡ [EN];

b) [DN] ≡ [NC].

(Gazeta Matematica nr. 1/2014)

SUBIECTUL IV (7 p)

În pătratul ABCD de latură 5 cm, se consideră punctele E ∈ (BC), F ∈ (CD) astfel încât m(∢EAF)=45^0. Dacă aria triunghiului CEF este de 3 cm^2, calculați aria triunghiului AEF.

Notă:

- Timp de lucru : **3 ore**.

Botosani **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
ETAPA LOCALĂ - 22 februarie 2015

Clasa a VIII- a

<u>SUBIECTUL I (7p)</u>

a). (3p) Să se arate că $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, pentru orice *a* şi *b* numere reale nenegative.
b). (4p) Să se rezolve ecuaţia în numere reale

$$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22}$$

<u>SUBIECTUL II (7p)</u>

a) (3p) Să se afle partea întreagă a numarului *a*, unde

$$a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \ldots + \sqrt{4031 - 2\sqrt{2015 \cdot 2016}}$$

b). (4p) Dacă $9x^2 + 11xy + 2y^2 = 0$, cu x si y reale nenule, atunci $\frac{5x+2y}{4x+y} \in \mathbb{N}$.

<u>SUBIECTUL III (7p)</u>

Punctele A, B, C și D sunt necoplanare, iar M este mijlocul segmentului [BC], T este mijlocul segmentului [AC], iar $N \in [AC]$ încât $AN = 2 \cdot NC$, $P \in [AB]$ încât $AP = 3 \cdot PB$, $E \in [AC]$ astfel încât $CE = \frac{AC}{6}$ și R este simetricul lui M față de punctual N. Demonstrați că punctele D, P, T și R sunt coplanare.

<u>SUBIECTUL IV (7p)</u>

Fie tetraedrul ABCD şi un punct M situat în interiorul triunghiului BCD. Paralelele duse prin M la muchiile AB, AC si AD intersecteaza feţele (ACD), (ABD) şi respectiv (ABC) în punctele A', B', si respectiv C'. Dacă (DBC)||(A'B'C'), atunci demonstraţi că M este centrul de greutate al triunghiului BCD.

(G.M. nr. 12/2014)

NOTA:

Timp de lucru **3 ore**

BAREM DE CORECTARE

Clasa a V- a

SUBIECTUL I (7 p)

$n=\overline{abcd}$; $\overline{abcd}=\left[\left(\overline{acd}-2\right)\cdot 19\right]:2 \Rightarrow 2\cdot\overline{abcd}=\left(\overline{acd}-2\right)\cdot 19$ 1p

$2\left(1000a+100b+\overline{cd}\right)=19\left(100a+\overline{cd}-2\right) \Rightarrow$

$100(a+2b)=17\cdot\overline{cd}-38$ 2p

$\mathcal{U}\left(17\cdot\overline{\mathrm{cd}}-38\right)=0 \Rightarrow \mathrm{d}=4 \Rightarrow 10(\mathrm{a}+2\mathrm{b})=17\mathrm{c}+3$ 2p

$\mathcal{U}(17\mathrm{c}+3)=0 \Rightarrow \mathrm{c}=1 \Rightarrow \mathrm{a}+2\mathrm{b}=2$

$a=2\,, b=0, n=\ 2014$ 2p

SUBIECTUL II (7 p)

a) $n=2k+1\,, k\in\mathbb{N}\,,\ S_1=(2k+1)(k+1),\ S_2=k+1$

$(2\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+1)=2015(\mathrm{k}+1) \Rightarrow \mathrm{n}=2015$ 2p

b) $S_1+S_2=2(k+1)^2$. Numărul căutat este 2 ....2p

c) $S_1-S_2=2k(k+1),\ k\in\mathbb{N}$ 1p

$k(k+1)=2^{m-1}, k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*$

$k=1\,, m=2$(justificare) $\Rightarrow n=3$ 2p

SUBIECTUL III (7 p)

$(a+2b+3c)-(3a+2b+c)=4 \Rightarrow c-a=2 \Rightarrow c=a+2$ 2p

$3a+2b+a+2=598 \Rightarrow 2a+b=298 \Rightarrow b=298-2a$ 2p

$a<b<c \Rightarrow a<298-2a<a+2 \Rightarrow a=99$ 2p

$b=100\,,\ c=101$ 1p

SUBIECTUL IV (7 p)

a) $21^{22}<5^{33}\cdot 2^{22} \Leftrightarrow 441^{11}<(5^3\cdot 2^2)^{11} \Leftrightarrow 441^{11}<500^{11}$ 2p

b) $a=2^{22}\cdot 2\cdot 5^{33}\cdot 5^2=2^{22}\cdot 5^{33}\cdot 50$ 2p

$b=3^{22}\cdot 7^{22}\cdot 7^2=21^{22}\cdot 49$ 2p

$2^{22}\cdot 5^{33}>21^{22}\,, 50>49 \Rightarrow a>b$ 1p

Clasa a VI-a Barem de notare

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.a	Transformările fracţiilor zecimale în fracţii ordinare: $2,1(6)=2\frac{15}{90}=2\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$ şi $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	1p
	$2,1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)=\frac{13}{6}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{40}{6}$	1p
	$\left(2-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$	1p
	Finalizare: $\frac{40}{6}\cdot\frac{36}{25}-9\cdot 1=\frac{3}{5}$	1p
1.b	$(a,b)=15 \Rightarrow$ există $x,y\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=15\cdot x$, $b=15\cdot y$, $(x,y)=1$ Din $a+b=240$ obţinem $15\cdot x+15\cdot y=240$	1p
	$x+y=16$, $(x,y)=1\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,15),(15,1),(3,13),(13,3),(5,11),(11,5),(7,9),(9,7)\}$	1p
	$(a,b)\in\{(15,225),(225,15),(45,195),(195,45),(75,165),(165,75)\}\cup$ $\cup\{(105,135),(135,105)\}$	1p
2.	**a)** Din ΔABC *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ACB\Rightarrow\sphericalangle ABM\equiv\sphericalangle ACN$ ΔAMN *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle AMB=\sphericalangle ANC$ Conform cazului LUU $\rightarrow \Delta AMB=\Delta ANC\rightarrow MB=NC$; $\sphericalangle MAB=\sphericalangle NAC$	2p
	b) Conform cazului LUL $\Rightarrow \Delta PNB\equiv\Delta QMC\Rightarrow PN=QM$; $\sphericalangle PNB\equiv\sphericalangle QMC$	2p
2	**c)** Conform cazului LUL $\Rightarrow \Delta MBP\equiv\Delta NCQ\Rightarrow MP=NQ$	2p
	d) $\sphericalangle PNB\equiv\sphericalangle QMC\Rightarrow\Delta MON$ *isoscel* $\Rightarrow MO=NO$ Dar $OP=PN-ON$; $OQ=MQ-OM\Rightarrow OP=OQ$ Conform cazului LLL $\Rightarrow\Delta AOP\equiv\Delta AOQ\Rightarrow\sphericalangle PAO\equiv\sphericalangle QAO$ Dar şi $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle NAC\Rightarrow\sphericalangle MAO\equiv\sphericalangle NAO$	1p

3	Calculăm a doua paranteză din A: $1+1+2+2^2+...+2^{2013}=(2+2)+2^2+...+2^{2013}=\left(2^2+2^2\right)+2^3+...+2^{2013}=$ $=...=2^{2013}+2^{2013}=2^{2014}$	2p
	Aducând în prima paranteză la acelaşi numitor avem: $A=\frac{2^{2014}+2^{2013}+...+2+1}{2^{2014}}\cdot 2^{2014}=$ $=2^{2015}-1$	2p
	$B=\frac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+...+2^{2014}}-2;$ Fie S=$2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1$ Atunci $2\cdot$S=$2^{2016}+2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2 \Rightarrow$ $2\cdot$S=$2^{2016}+S+1 \Rightarrow S=2^{2016}-1$ (1) Fie T=$1+2^2+2^4+...+2^{2014}$ Atunci 4T=$2^2+2^4+...+2^{2014}+2^{2016} \Rightarrow$ $4T=2^{2016}+T-1 \Rightarrow 3T=2^{2016}-1 \Rightarrow T=\frac{2^{2016}-1}{3}$ (2) $B=\frac{2^{2016}-1}{\frac{2^{2016}-1}{3}}-2=3-2=1;$	2p
	Finalizare: $B+A-2^{2015}=0$.	1p

4	Pentru $p=3$ avem numerele 5, 13, 29 şi 79, care sunt, toate, numere prime.	2p
	Pentru $p=5$ avem numărul $p^4-2=623$, care se divide cu 7.	1p
	Demonstrăm că pentru $p>5$, număr prim, nu toate cele patru numere sunt prime. Dacă $p>5$, atunci $p=5\cdot k+1$, $p=5\cdot k+2$, $p=5\cdot k+3$ sau $p=5\cdot k+4$, $k\geq 1$ ($p=5\cdot k$, $k>1$, nu sunt numere prime). Dacă $p=5\cdot k+1$, atunci $p^2+4=(5\cdot k+1)^2+4=\mathrm{M}_5+1+4=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+2$, atunci $p^3+2=(5\cdot k+2)^3+2=\mathrm{M}_5+2^3+2=\mathrm{M}_5+10=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+3$, atunci $p+2=5\cdot k+3+2=\mathrm{M}_5+5=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+4$, atunci $p^2+4=(5\cdot k+4)^2+4=\mathrm{M}_5+4^2+4=\mathrm{M}_5+20=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim. Singura soluţie este $p=3$.	1p

Clasa a VII-a

Subiectul I.

Barem de notare

a) Presupunem că y≠0.Atunci relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,fals........................1p

Rezultă că y=0,deci si x=0...1p

b) Relația din enunț devine $|a+1|\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{2}=|b+1|\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$..............................1p

Echivalent cu $(|a+1|-3)\cdot\sqrt{2}=(|b+1|-1)\cdot\sqrt{3}$..1p

Conform a), rezultă $|a+1|-3=0$ și $|b+1|-1=0$.. 2p

Obținem perechile (2;0),(-4;0),(2;-2),(-4;-2)...1p

Subiectul II.

a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{k}{n(n+k)},\forall n,k\in\mathbb{N}$..2p

b) $a=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\frac{4}{8\cdot12}+\frac{5}{12\cdot17}+\frac{6}{17\cdot23}+\frac{7}{23\cdot30}=\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}=\frac{7}{15}$.............................. 1p

$b=3+8+13+\cdots+10018=3+(5\cdot1+3)+(5\cdot2+3)+\cdots+(5\cdot2003+3)=$..........1p

=3 ·2004 + 5 · (1+2+3+...+2003) = 1002 · 1001.. 1p

$15\cdot a+\frac{b}{1002}=10028$.. 1p

$\left[\sqrt{15\cdot a+\frac{b}{1002}}\right]=100$...1p

Subiectul III.

a) Fie P mijlocul segmentului [BD]...1p

[MP] linie mijlocie in $\Delta ABD\Rightarrow MP||AD$ și $MP=\frac{AD}{2}$...1p

Demonstratia ca [ED] linie mijlocie in ΔNMP...1p

Concluzie, E mijlocul lui [MN]..1p

b) P mijlocul lui [BD]$\Rightarrow PD=\frac{BD}{2}$..1p

BD=DC și D mijlocul lui [PN](conform a)..1p

Concluzia...1p

Subiectul IV.

Se prelungește $[CB]$ cu segmentul $[BT]\equiv[DF]$, $B\in(TE)$ .... (1p)

$\Delta ADF\equiv\Delta ABT\Rightarrow\sphericalangle TAB\equiv\sphericalangle DAF\Rightarrow m(TAE)=m(\sphericalangle TAB)+m(\sphericalangle BAE)=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ ...... (1p)

$\Delta TAE\equiv\Delta FAE\Rightarrow A_{TAE}=A_{FAE}$ si $A_{TAE}=A_{ABT}+A_{ABE}=A_{ADF}+A_{ABE}\Rightarrow A_{FAE}=A_{ADF}+A_{ABE}$ .... (2p)

$A_{ABEFD}=2A_{AEF}$ .... (1p)

$A_{AEF}=(A_{ABCD}-A_{CFE}):2=(25-3):2=11\text{ cm}^2$ .... (2p)

Subiectul I.

a). Deoarece ambele părţi ale inecuaţiei sunt nenegative, inecuaţia este echivalentă cu

$4\text{ab} \leq (a+b)^2$ **(1p)**

ceea ce este echivalent cu $(a-b)^2 \geq 0$, evident o relaţie adevarată. **(2p)**

b). Pentru existenţa radicalilor, trebuie să considerăm $x \geq 4, y \geq 9, z \geq 22$

Aplicăm inegalitatea mediilor pentru fiecare radical astfel

$\sqrt{x-4} = \sqrt{1 \cdot (x-4)} \leq \frac{1+x-4}{2}$, deci $2\sqrt{x-4} \leq x-3$,

$2\sqrt{y-9} = \sqrt{4 \cdot (y-9)} \leq \frac{4+y-9}{2}$, deci $4\sqrt{y-9} \leq y-5$,

$3\sqrt{z-22} = \sqrt{9 \cdot (z-22)} \leq \frac{9+z-22}{2}$, deci $6\sqrt{z-22} \leq z-13$.

Adunând aceste trei relaţii avem $2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22} \leq x+y+z-21$ **(2p)**

cu egalitate dacă în fiecare inegalitate a mediilor cei doi termeni sunt egali, **(1p)**

adică $x-4=1, y-9=4, z-22=9$, deci $x=5, y=13, z=31$. **(1p)**

Subiectul II.

a). Termenul general al sumei este

$\sqrt{2\text{k}+1-2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2} = |\sqrt{k+1}-\sqrt{k}| = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ **(1p)**

Efectuând suma, termenii se simplifica şi avem ca **(1p)**

$a = \sqrt{2016} - 1 \simeq 44{,}8 - 1 = 43{,}8$, deci [a]=43. **(1p)**

b). Descompunem în factori relaţia dată şi obţinem $9\text{x}^2 + 11\text{xy} + 2\text{y}^2 = 9x^2 + 9xy + 2xy + 2y^2 = (9\text{x}+2\text{y})(x+y) = 0$. **(2p)**

Avem două cazuri

1. x = -y, atunci $\frac{5\text{x}+2\text{y}}{4\text{x}+y} = \frac{3x}{3\text{x}} = 1 \in \mathbb{N}$ **(1p)**
2. 9x = -2y, atunci $\frac{5\text{x}+2\text{y}}{4\text{x}+y} = \frac{5\text{x}-9\text{x}}{4\text{x}-\frac{9\text{x}}{2}} = \frac{-8\text{x}}{-x} = 8 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

Subiectul III

Patrulaterul MERT este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc)$\Longrightarrow$ ME ∥ RT (1)..............2 punct

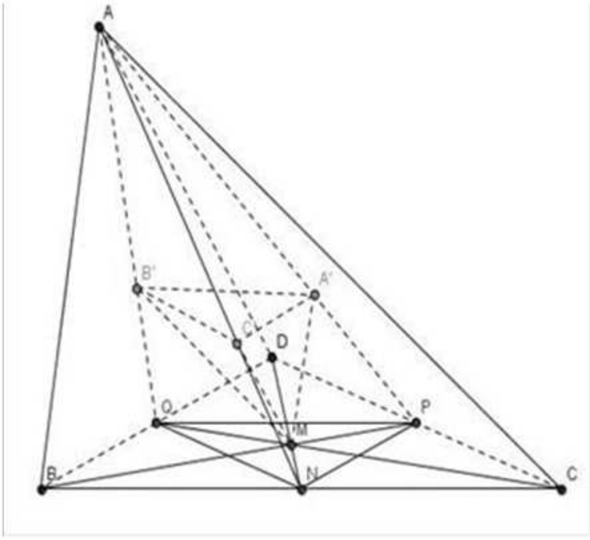
[ME] este linie mijlocie în ΔCBN $\Longrightarrow$ ME ∥ BN(2)... 1punct

$\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AN} = \frac{3}{4}$ $\Longrightarrow$ BN ∥ PT (3) (Reciproca teoremei lui Thales) şi ME ∥ PT...............................1 punct

Din relațiile (2) și (3) rezultă că ME ∥ PT ceea ce împreună cu relația (1) implică faptul că punctele R,T și P sunt coliniare. 2punct

Finalizare .... 1 punct

Subiectul IV



Dreptele MC'||AD determină un plan care intersectează muchia BC în N. Analog (MA', AB) intersectează DC în P şi (MB', AC) intersecteaza DB în Q.

Deoarece A'C' || (DBC), dreapta de intersecţie dintre planul (AC'A') şi (ABC) este NP si A'C'|| NP.

Analog A'B'||PQ şi B'C'||NQ. **(2p)**

Aplicând Teorema lui Thales în triunghiurile ANP, ANQ şi AMQ avem

$\frac{A'P}{AP}=\frac{C'N}{AN}=\frac{B'Q}{AQ}(1).$ **(1p)**

Pe de alta parte, aplicând aceeaşi teoremă în triunghiurile ABP, AND şi

AQC avem urmatoarele relatii $\frac{A'P}{AP}=\frac{MP}{BP},\frac{C'N}{AN}=\frac{MN}{DN},\frac{B'Q}{AQ}=\frac{MQ}{CQ}(2).$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $\frac{MN}{DN}=\frac{MQ}{CQ}=\frac{MP}{BP}\Rightarrow\frac{MN}{MD}=\frac{MP}{MB}=\frac{QM}{CM}.$ **(2p)**

Considerăm triunghiurile MPQ şi MBC care vor fi asemenea (LUL), deci QP|| BC. Analog QN ||DC şi NP || BD. **(1p)**

Scriind acum în triunghiul DBC următoarele rapoarte, avem conform Teoremei lui Thales

$\frac{BN}{BC}=\frac{DP}{DC}=\frac{DQ}{DB}=\frac{NC}{BC}$, deci N este mijlocul lui (BC). **(1p)**

În mod analog, P este mijlocul lui (DC), iar Q mijlocul lui (BD). În consecinţă, M este centrul de greutate al triunghiului DBC