OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A V-A

1. Un număr natural alcătuit din cel puțin două cifre se numește *interesant* dacă este divizibil cu fiecare cifră a sa și cu fiecare număr obținut din suma oricăror două cifre ale sale.

a) Determinați cel mai mic număr *interesant*.

b) Arătați că există o infinitate de numere *interesante*.

Marius Damian, Brăila

2. a) Calculați: $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$.

b) Arătați că numărul $N=1040^{2015}$ poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Ștefan Ciochină, Brăila

3. Se dă numărul $P_n=2^n$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural *n*, unul din numerele $P_n\left(P_n^2-1\right)$ și $P_n\left(P_n^2+1\right)$ este divizibil cu 10.

Ciprian Dobraniș, Brăila

4. Să se determine numerele naturale $x, y, z,$ ştiind că $4^x+2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)=4029$.

Mihaela Baltă, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A VI-A

1. Arătați că $3^{2015}+4^{2015}<5^{2015}$.

George-Florin Șerban, Brăila

2. Fie numerele raționale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ astfel încât

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000.$$

Arătați că suma $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+...+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ este un număr de forma $2^n-1,\ n\in\mathbb{N}.$

Octavia Popa, Brăila

3. Fie $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât:

$$M_1M_2=9;\ M_2M_3=17,\ M_3M_4=33,\ M_4M_5=65,\ ...,\ M_{n-1}M_n.$$

a) Aflați lungimea segmentului $[M_8M_9]$.

b) Aflați $n\in\mathbb{N}$ dacă $M_1M_n=8194.$

c) Aflați lungimea segmentului M_2A unde *A* este mijlocul segmentului $[M_7M_9]$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

4. Fie $\sphericalangle AOD$ cu $m(\sphericalangle AOD)=98^0$ și $(OB$, $(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ astfel încât

$$a\cdot m(\sphericalangle AOB)=c\cdot m(\sphericalangle BOC) \text{ și } b\cdot m(\sphericalangle BOC)=c\cdot m(\sphericalangle COD),$$

unde *a*, *b*, *c* sunt numere prime care verifică relația $3a+5(3b+7c)=195$.

Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle COD)$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A VII-A

1. Rezolvați în numere întregi ecuația $\sqrt{x-5} = 15 - y^2$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

2. Fie *x, y, z* cifre nenule distincte.

a) Determinați valorile raționale ale numărului

$$a = \sqrt{\overline{0,x(y)} + \overline{0,y(z)} + \overline{0,z(x)}}.$$

b) Aflați valorile raționale ale numărului

$$a = \sqrt{\overline{0,00.....0x(y)} + \overline{0,00.....0y(z)} + \overline{0,00.....0z(x)}},$$

unde după virgulă în fiecare număr sunt *n* cifre de 0, $n \in \mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

3. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AD \neq CD$ și $AB = AD + DC$. Notăm cu *M* punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor *A* și *D*. Să se demonstreze că:

a) punctele *A*, *M*, *C* nu sunt coliniare;

b) $\text{aria}\left[ADCM\right] = \text{aria}\left[AMB\right]$.

Marius Damian, Brăila

4. Pe o tablă magnetică se află primele 16 numere naturale nedivizibile cu 4. Elena își propune să completeze un dreptunghi cu 3 linii și 5 coloane cu numere distincte de pe tablă astfel încât cele 3 sume de pe linii să fie egale și cele 5 sume de pe coloane să fie egale. Începe cu cel mai mare număr de pe tablă și reușește ce și-a propus.

a) Ce număr de pe tablă a rămas nefolosit?

b) Dați un exemplu de așezare a numerelor care să verifice ipotezele din enunț!

Gabriel Daniilescu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VIII-A

1. Se consideră numărul $N=\sqrt{2009\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2015+16}$. Calculați $\left[\frac{N}{2015}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Ștefan Ciochină, Brăila

2. Dacă numerele reale $x, y, z \in [0,+\infty)$ verifică relațiile:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x\cdot y}+1 \text{ și } \frac{y+z}{2} \leq \sqrt{y\cdot z}+4,$$

demonstrați că $\left|\sqrt{z}-\sqrt{x}\right| \leq 3\sqrt{2}$.

Marius Damian, Brăila

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și $N \in (CD)$ astfel încât $DN=\frac{1}{3}DC$.

a) Determinați muchia cubului știind că aria triunghiului $A'AN$ este $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ cm^2.

b) Determinați cosinusul unghiului dintre planele $(A'AN)$ și $(D'DA)$.

c) Calculați distanța de la D la planul $(A'AN)$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

4. Se consideră triunghiul ABC, $AC=BC$, $m(\widehat{ACB})=90^\circ$ și triunghiul DAB, $DA=DB$, situate în plane perpendiculare. Fie $M\in(BC)$, $BM=2CM$, $N\in(AC)$, $AC=3AN$, $P\in MN\cap AB$, T mijlocul segmentului $[AB]$, iar G centrul de greutate al triunghiului DAB. Să se calculeze tangenta unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele (ABC) și (DBC), știind că $3SD=5CT$, unde $S\in PG\cap AD$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

CLASA A V-A - Soluții

1. Soluție. a) Numărul 10 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 0, numărul 11 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 2. Cel mai mic număr *interesant* este 12, deoarece $12 \vdots 1$, $12 \vdots 2$ și $12 \vdots 3$.

b) Considerăm șirul de numere naturale

$$12,\ 11112,\ 11111112,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots111}_{(3n+1)\text{ cifre}}2,\ \ldots$$

Fiecare termen al șirului este număr *interesant*, deoarece este divizibil cu 1, cu 2 și cu 3. Fiind o infinitate de termeni, problema este rezolvată.

2. Soluție. a) $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2=(64+1)\cdot 16=65\cdot 16=1040$

b) $N=1040^{2015}=1040^{2014}\cdot 1040=1040^{2014}\cdot\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$

$\Rightarrow N=\left(1040^{1007}\cdot 8\cdot 4\right)^2+\left(1040^{1007}\cdot 4\right)^2$

3. Soluție. $P_n(P_n^2-1)=2^n(2^{2n}-1)=8^n-2^n$, $P_n(P_n^2+1)=2^n(2^{2n}+1)=8^n+2^n$

U(8^n) $\in\{8,4,2,6\}$, U(2^n) $\in\{2,4,8,6\}$, U(8^n-2^n)=0 pt n=4k, n=4k+2 U(8^n+2^n)=0 pt n=4k+1, n=4k+3

4. Soluție. Deoarece $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)$ este număr par, iar 4029 este număr impar se impune ca 4^x să fie număr impar rezultând $x=0$. Înlocuind se obține: $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)=4028$, de unde rezultă $3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}=2014$. Dar $U\left(3^{2y}\cdot 5^y\right)=U\left(9^y\cdot 5^y\right)=U\left(45^y\right)=5$ pentru $y\neq 0$, de unde rezultă $z=1$. Obținem $45^y=2025$, adică $y=2$.

CLASA A VI-A - Soluții

1. Soluție.

$$5^{2015}=5^2\cdot 5^{2013}=\left(3^2+4^2\right)\cdot 5^{2013}=3^2\cdot 5^{2013}+4^2\cdot 5^{2013}>$$

$$>3^2\cdot 3^{2013}+4^2\cdot 4^{2013}=3^{2015}+4^{2015}.$$

2. Soluție. Notăm S= $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+..........+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ și adunând cu $\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000,$ obținem $S=16-1=2^4-1.$

3. Soluție. a) $M_nM_{n+1}=2^{n+2}+1; M_8M_9=2^{10}+1=1025.$

b)

$M_1M_n=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+...+M_{n-1}M_n=$

$=(2^3+1)+(2^4+1)+...+(2^{n+1}+1)=2^{n+2}-2^3+n-1=8194$

$M_1M_{10}=2^{11+2}-8+11-1=2^{13}+2=8194\Rightarrow n=11.$

c)

$M_2A=M_2M_7+M_7M_9:2=(2^4+1)+(2^5+1)+(2^6+1)+(2^7+1)+(2^8+1)+[(2^9+1)+(2^{10}+1)]:2=$

$=(2^9-2^4)+5+2^8+2^9+1=1270.$

4. Soluție. $3a+5\left(3b+7c\right)=195\Rightarrow a=5\Rightarrow 5\left(3b+7c\right)=180\Rightarrow c=3\Rightarrow b=5$

Rezultă că $\begin{cases} m\left(\angle AOB\right)+m\left(\angle BOC\right)+m\left(\angle COD\right)=98^0 \\ 5\cdot m\left(\angle AOB\right)=3\cdot m\left(BOC\right) \\ 5\cdot m\left(\angle BOC\right)=3\cdot m\left(COD\right) \end{cases}$

$\Rightarrow m\left(\angle AOB\right)=18^0\Rightarrow m\left(\angle BOC\right)=30^0\Rightarrow m\left(\angle COD\right)=50^0.$

CLASA A VII-A - Soluții

1. **Soluție.** $\sqrt{x-5} \geq 0$ si x-5 ≥ 0 => 15-y$^2 \geq 0$ => y$^2 \leq 15$ si y $\in$ Z=>y$^2 \in \{0,1,4,9\}$

- $y^2 = 0 => \sqrt{x-5} = 15 => x-5 = 225 => x = 230$
- $y^2 = 1; y = \pm 1 => \sqrt{x-5} = 14 => x-5 = 196 => x = 201$
- $y^2 = 4; y = \pm 2 => \sqrt{x-5} = 11 => x-5 = 121 => x = 126$
- $y_2 = 9; y = \pm 3 => \sqrt{x-5} = 6 => x-5 = 36 => x = 41$

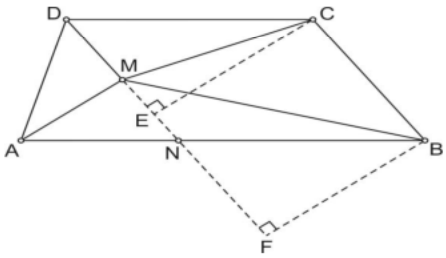
2. Soluție. a) $a = \sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{90}} = \sqrt{\dfrac{x+y+z}{9}} = \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3}$ $\quad a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x+y+z = k^2, k \in \mathbb{N}$

Deoarece $1 \leq x < y < z \leq 8 \Rightarrow k^2 \in \{9,16\}$. Deci $a \in \left\{1, \dfrac{4}{3}\right\}$.

b) Pentru $n = 2k, k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, avem $a = \sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{9 \cdot 10^{n+1}}} = \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3 \cdot 10^k}$ și $a \in \left\{\dfrac{1}{10^k}, \dfrac{4}{3 \cdot 10^k}\right\}$

Pentru $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, avem $a = \dfrac{\sqrt{10(x+y+z)}}{3 \cdot 10^{k+1}}$ pentru $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y+z = 10$ și $a \in \left\{\dfrac{1}{3 \cdot 10^k}\right\}$.

3 Soluție. a) Presupunem, prin reducere la absurd, că punctele A, M, C sunt coliniare. Atunci $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle CAB$ (alterne interne). Dar din ipoteză avem că $[AM$ este bisectoarea unghiului DAB, deci $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CAD$. Deducem că $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle CAD$, deci ΔDCA este isoscel cu $AD = CD$, fals. Se contrazice faptul că din ipoteză avem $AD \neq CD$. Presupunerea făcută este falsă, deci punctele A, M, C nu sunt coliniare.



b) Fie $\{N\} = DM \cap AB$. Deoarece $[DN$ este bisectoarea unghiului ADC, avem $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle CDN$, iar din $DC \parallel AB$ rezultă $\sphericalangle CDN \equiv \sphericalangle AND$ (alterne interne). Prin urmare, $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle AND$, deci ΔADN este isoscel cu $AD = AN$. Atunci bisectoarea AM este și mediană, deci aria$[AMD]$ = aria$[AMN]$.

Din ipoteză avem $AB = AD + DC$. Obținem astfel că $NB = AB - AN = AB - AD = DC$ și cum $NB \parallel DC$, rezultă că $NBCD$ este paralelogram. Construim $CE \perp DN$ și $BF \perp DN$, $E, F \in DN$ și avem $CE = BF$, deci aria$[CMD] = \dfrac{CE \cdot DM}{2} = \dfrac{BF \cdot MN}{2}$ = aria$[BMN]$. În final,

aria$[ADCM]$ = aria$[ADM]$ + aria$[CMD]$ = aria$[AMN]$ + aria$[BMN]$ = aria$[AMB]$.

4 Soluție. a) Mulțimea numerelor de pe tablă este $A = \{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19,21\}$. Suma lor este $S_{16} = 171$. Notăm cu n numărul nefolosit și cu S_{15} suma numerelor așezate în cele 15 pătrățele ale dreptunghiului. Avem $S_{15} = 171 - n$. Notăm cu S_c suma numerelor de pe o coloană și cu S_l suma numerelor de pe o linie $\Rightarrow S_{15} = 5S_c$ și $S_{15} = 3S_l \Rightarrow S_{15} \vdots 5$ și $S_{15} \vdots 3 \Rightarrow S_{15} \vdots 15 \Rightarrow 171 - n \vdots 15 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 165 + 6 - n \vdots 15 \Leftrightarrow 6 - n \vdots 15 \Leftrightarrow n - 6 \vdots 15 \Rightarrow n \in \{6, 21\}$. Dar 21 este cel mai mare număr de pe tablă $\Rightarrow n \neq 21 \Rightarrow n = 6$.

b) $S_{15} = 171 - 6 = 165 \Rightarrow S_c = 33$ și $S_l = 55$. Un exemplu ar fi:

5	11	17	13	9
7	19	1	18	10
21	3	15	2	14

CLASA A VIII-A - Soluții

1. Soluție.

$N=\sqrt{2009\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2015+16}\Rightarrow N=\sqrt{(2012-3)(2012-1)(2012+1)(2012+3)+16}$

$\Rightarrow N=2012^2-5$

$\left[\frac{N}{2015}\right]=\left[\frac{2012^2-5}{2015}\right]=\left[\frac{2015\cdot 2009+4}{2015}\right]=2009$

2. Soluție. Avem:

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{x\cdot y}+1\Rightarrow x-2\sqrt{x\cdot y}+y\le 2\Rightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\le 2\Rightarrow\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\le\sqrt{2}$$

și
$$\frac{y+z}{2}\le\sqrt{y\cdot z}+4\Rightarrow y-2\sqrt{y\cdot z}+z\le 8\Rightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\le 8\Rightarrow\left|\sqrt{y}-\sqrt{z}\right|\le 2\sqrt{2}.$$

Folosind acum inegalitatea triunghiulară pentru module, obținem

$$\left|\sqrt{z}-\sqrt{x}\right|=\left|\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\right|\le\left|\sqrt{z}-\sqrt{y}\right|+\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|\le\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

3 Soluție. a) Fie x muchia cubului ,din triunghiul dreptunghic AND calculam

$\mathrm{AN}=\frac{\mathrm{x}\sqrt{10}}{3}\Rightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{A'AN}}=\frac{x^2\sqrt{10}}{6}=\frac{8\sqrt{10}}{3}\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=4$

b) Proiectia triunghiului $\mathrm{A'AN}$ pe planul ($\mathrm{D'DA}$) este triunghiul $\mathrm{A'AD}$ =>

Aria[$\mathrm{A'AD}$]=Aria [$\mathrm{A'AN}$] $\cdot$ cos<[($\mathrm{A'AN}$),($\mathrm{A'AD}$)] =>

$\frac{\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}}{2}=\frac{x^2\sqrt{10}}{6}\cdot$cosinusul<[($\mathrm{A'AN}$),($\mathrm{A'AD}$)]=>cosinusul<[($\mathrm{A'AN}$),($\mathrm{A'AD}$)]= $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

c) Fie $\mathrm{DT}\perp\mathrm{AN}$=>DT=distanta de la D la planul ($\mathrm{A'AN}$) ;$\mathrm{DT}\perp\mathrm{AN}$;$\mathrm{DT}\perp\mathrm{AA'}$;

$\mathrm{AA'},\mathrm{AN}\subset(\mathrm{A'AN})\Rightarrow\mathrm{DT}\perp(\mathrm{A'AN})$;$\mathrm{DT}=\frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DN}}{\mathrm{AN}}=\frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}$

4. Soluție. Fie V mijlocul lui $[BC]$. $[TV]$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC, m\left(ACB\right)=90^\circ$, deci $TV\perp BC$.

Cum $[DT]$ e linie mijlocie în triunghiul $DAB, DA=DB$, rezultă că $DT\perp BC$. Mai avem și $(ABC)\perp(ABD)$,deci $DT\perp(ABC)$.Cu teorema celor trei perpendiculare rezultă că $DV\perp BC$, deci $tg\left((ABC),(DBC)\right)=tg\left(TV,DV\right)=\frac{DT}{TV}$.

Fie $CM=AN=x, BM=CN=2x, AB=3x\sqrt{2}, CT=\frac{3x\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SD=\frac{5x\sqrt{2}}{2}$.

Se aplică Menelaos în ΔABC, $P-N-M$:

$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=1\Rightarrow\frac{PA}{PA+3\sqrt{2}x}\cdot\frac{2x}{x}\cdot\frac{2x}{x}=1\Rightarrow PA=x\sqrt{2}$. Se aplică Menelaos în ΔATD, $P-S-G$:

$$\frac{PA}{PT}\cdot\frac{GT}{GD}\cdot\frac{SD}{SA}=1\Rightarrow\frac{x\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5x\sqrt{2}}{2}}{SA}=1\Rightarrow SA=\frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicând Pitagora în ΔATD, avem $\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{5x\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{3x\sqrt{2}}{2}\right)^2+DT^2\Rightarrow DT=\frac{3x\sqrt{6}}{2}$,

deci $tg\left(TV,DV\right)=\frac{\frac{3x\sqrt{6}}{2}}{\frac{3x}{2}}=\sqrt{6}$.