INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015

CLASA a V-a

1. a) Calculaţi $a=\left(2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+...+2^{n+10}\right):2^n-2^5$;

b) Determinaţi numerele naturale x,y şi z pentru care $5^z\cdot\overline{xy}\cdot\overline{yx}=a$, unde a este numărul determinat mai sus.

2. Câtul împărțirii a două numere naturale este cu *3* mai mare decât restul. Aflați cele două numere, știind că diferența dintre deîmpărțit și triplul împărțitorului este *15*.

3. Determinaţi mulţimile A şi B, ştiind că satisfac simultan condiţiile:

1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$;
2) $A\cap B=\{3,4\}$;
3) $A\cap\{5.6,7\}=\varnothing$;
4) $\{1,2\}\cap B\neq\varnothing$.

4. Se consideră opt numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror șapte dintre ele, se obțin rezultatele: *42, 47, 50, 52, 54, 55, 56 și 57.* Determinați cele opt numere.

CLASA a VI-a

1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ (x,y,z,t cifre în baza zece) care admit exact 12 divizori naturali și $\frac{\overline{xy}}{\overline{zt}}=3$.

2. Găsiți toate perechile de numere naturale disticte a,b pentru care are loc relația: 3(a,b) + 2[a,b] = 140 , unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c al numerelor a,b , iar [a,b] este c.m.m.m.c al numerelor a,b.

3. Fie punctele coliniare A,B,C,D în această ordine. Dacă M,N,P sunt mijloacele segmentelor (AB),(BC),(CD) și MN=9 cm, NP=7 cm , iar AB+CD=16 cm să se calculeze lungimile segmentelor (AB),(BC),(CD)

4. Se consideră n unghiuri adiacente în jurul unui punct. Dacă primul unghi se măreşte cu 1^0, al doilea unghi se micşorează cu 2^0, al treilea unghi se măreşte cu 3^0, al patrulea unghi se mişcorează cu 4^0 şi aşa mai departe, astfel se obţin unghiuri cu măsuri egale (exprimate printr-un număr natural). Se cere:

a) Arătaţi că, în condiţiile date, nu pot fi construite astfel trei unghiuri adiacente în jurul unui punct;
b) Determinaţi cel mai mic număr n posibil de unghiuri adiacente în jurul unui punct în condiţiile date.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015

CLASA a VII-a

1. Fie numerele $a = \left|2\sqrt{3} - 4\right|$ și $b = \sqrt{\left(5 - 3\sqrt{3}\right)^2}$.

a) Comparați cele două numere;

b) Calculați diferența dintre media aritmetică și semiprodusul celor două numere.

2. Arătaţi că nu există numere reale x şi y pentru care $x > 2, y > 2, xy = 6$ şi $x + y \geq 5$.

3. Fie trapezul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90^0$, $BD \perp BC$ şi $AB = \frac{DC}{4}$. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor (DC) şi (BM), arătaţi că $DN \perp BM$.

4. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC, astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă P și Q sunt picioarele perpendicularelor din M pe AB, respectiv pe AC, iar E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

CLASA a VIII-a

1. Găsițl numerele prime x și y din inegalitatea: $4^{x+2} + 4^{y-3} \leq 2^{x+y}$.

2. Să se afle numerele reale $a \geq 1, b \geq 2$ *și* $c \geq 3$, ştiind că:
$$a + b + c = 2\left(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c-3}\right) + 3.$$

3. Fie $VABC$ o piramidă regulată cu baza ΔABC şi M mijlocul segmentului $[BC]$. Dacă sinusul unghiului dintre planele (VAB) şi (VAM) este $\frac{\sqrt{3}}{3}$, arătaţi că $VABC$ este un tetraedru regulat.

4. Fie pătratul $ABCD$ şi triunghiul ABF isoscel, situate în plane diferite, $AB = 6$ cm, $m(\sphericalangle ABF) = 120^0$, astfel încât $CM \perp (ABF)$, $M \in (AF)$.

a) Aflaţi distanţa de la punctul M la planul (ABC).

b) Aflaţi măsura unghiului format de dreptele AD și BF.