OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A V-A

1.) **a)** Dacă $a+3b=120$ şi $4b+4c=160$, atunci calculaţi suma $2a+9b+3c$.

b) Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care satisfac egalitatea:

$\overline{ab} = 4a + + 3b$.

2.) Care sunt acele numere naturale care împărţite la 27 dau restul egal cu pătratul câtului?

3.) Se consideră şirul de numere : 3, 8, 13, 18, … în care fiecare termen, începând cu al doilea, este cu 5 mai mare decât precedentul.

a) Aflaţi al 103-lea termen al şirului.

b) Al câtelea termen al şirului este numărul 1913 ?

c) Calculaţi suma primilor 150 de termeni ai şirului.

4.) Determinaţi mulţimile A, B şi C astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile următoare: **a)** $A \cap C = \{2\}$;

b) $A \cap B = \{3\}$;

c) $A \cup B = \{x \mid 2 \le x < 6\}$;

d) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

e) $A \setminus C = \{3\}$;

f) $B \cap C = \{4\}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

BAREM
CLASA A V-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$4b+4c=160 \Rightarrow b+c=40$	**1p**
	$2a+9b+3c=2a+6b+3b+3c=$	**1p**
	$2(a+3b)+3(b+c)=$	**1p**
	$2\cdot 120+3\cdot 40=240+120=360$	**1p**
b)	$10a+b=4a+3b$	**1p**
	$3a=b$	**1p**
	Aflarea soluţiilor: a=1, b=3; a=2, b=6; a=3, b=9	**2p**
	Aflarea numerelor: 13, 26, 39	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Deoarece împărţitorul ese 27, rezultă că restul trebuie să fie mai mic decât 27. Deci restul poate să fie 0, 1, 2, ..., 25 sau 26.	**1p**
	Deoarece restul este egal cu pătratul câtului, iar câtul este un număr natural, rezultă că restul este un pătrat perfect. Dintre numerele 0, 1, 2, ..., 26 pătrate perfecte sunt 0, 1, 4, 9, 16 şi 25, deci restul poate fi 0, 1, 4, 9, 16 sau 25.	**1p**
	Când restul este 0, atunci câtul este 0, pentru că $0^2=0$. Atunci numărul căutat este $0\cdot 27+0=0$. Când restul este 1, atunci câtul este 1, pentru că $1^2=1$. Numărul căutat este $1\cdot 27+1=28$. Când restul este 4, atunci câtul este 2, pentru că $2^2=4$. Numărul căutat este $2\cdot 27+4=58$. Când restul este 9, atunci câtul este 3, pentru că $3^2=9$. Numărul căutat este $3\cdot 27+9=90$. Când restul este 16, atunci câtul este 4, pentru că $4^2=16$. Numărul căutat este $4\cdot 27+16=124$. Când restul este 25, atunci câtul este 5, pentru că $5^2=25$. Numărul căutat este $5\cdot 27+25=160$. Deci, numerele căutate sunt 0, 28, 58, 90, 124, 160.	**7p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Al 103-lea termen este 5 · 102 + 3 = 513	**3p**
b)	5 · n + 3 = 1913, n = 382, deci al 383-lea termen	**3p**
c)	3 + 8 + …+ 748 = (3 + 748) · 150 / 2 = 56325	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$A\cup B=\{x \mid 2\le x<6\}=\{2,3,4,5\}$ $1\in A\cup C \Rightarrow 1\in A$ sau $1\in C$, dar $1\notin A\cup B \Rightarrow 1\notin A$ şi $1\notin B$. Deci $1\in C$. $5\in A\cup B \Rightarrow 5\in A$ sau $5\in B$, dar $5\notin A\cup C \Rightarrow 5\notin A$ şi $5\notin C$. Deci $5\in B$. $6\in A\cup C \Rightarrow 6\in A$ sau $6\in C$, dar $6\notin A\cup B \Rightarrow 6\notin A$ şi $6\notin B$. Deci $6\in C$.	**4p**
	$A\cap C=\{2\} \Rightarrow 2\in A$ şi $2\in C$, dar $2\notin A\cap B \Rightarrow 2\notin B$ $B\cap C=\{4\} \Rightarrow 4\in B$ şi $4\in C$, dar $4\notin A\cap C \Rightarrow 4\notin A$ $A\cap B=\{3\} \Rightarrow 3\in A$ şi $3\in B$ $A\setminus C=\{3\} \Rightarrow 3\notin C$	**3p**
	Deci $A=\{2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,4,6\}$	**2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A VI-A

1.) **a)** Dacă $\overline{0,1(a)}+\overline{0,a(3)}=0,3(5)$, aflaţi valoarea lui a.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x=\overline{a1b}+\overline{1b5}\ ,15|x\right\}$

2.) Calculaţi media aritmetică a numerelor A şi B ştiind că $A=81^{504}:3^{2015}$, iar B este cel mai mic număr natural nenul care împărţit la 12, $\frac{15}{4}$ şi $1,(7)$ dă, de fiecare dată, câtul număr natural şi restul 0.

3.) Fie triunghiul ABC, iar D mijlocul segmentului AB. Perpendiculara în D pe AB intersectează latura BC în E.

a) Arătaţi că triunghiul ABE este isoscel.

b) Dacă AB = 14 cm, BC = 18 cm şi perimetrul triunghiului AEB este 38 cm, calculaţi lungimea segmentului EC.

4.) Fie unghiul propriu AOB şi punctele M în interiorul unghiului AOB şi N în exteriorul unghiului AOB. Semidreapta $[OP$ este bisectoarea unghiului AOM, $m(\sphericalangle POB)=60^{\circ}$ şi $m(\sphericalangle BOM)=2\cdot m(\sphericalangle BON)$. Dacă $[OQ$ este bisectoarea unghiului AOP, să se arate că unghiul NOQ este drept.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A VI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\frac{\overline{1a}-1}{90}+\frac{\overline{a3}-a}{90}=\frac{35-3}{90}$	**2p**
	10+a-1+10a+3-a=32, 10a=20, a=2	**2p**
b)	$15 \mid x \Rightarrow 5 \mid x, 3 \mid x, x=\overline{a1b}+\overline{1b5} \Rightarrow b=0$ vagy $b=5$	**1p**
	Dacă $b=0 \Rightarrow x=\overline{a10}+105 \Rightarrow 3 \mid \overline{a10} \Rightarrow a \in \{2,5,8\}$ Dacă $b=5 \Rightarrow x=\overline{a15}+155 \Rightarrow a \in \{1,4,7\}$	**2p**
	x $\in$ {315,615,915,270,570,870}	**1p**
	card A= 6	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$A=81^{504}:3^{2015}=\left(3^4\right)^{504}:3^{2015}=3^{2016}:3^{2015}=3^1=3$	**3p**
	B trebuie să îndeplinească următoarele condiţii: $B:12\in\mathbb{N}$, $B:\frac{15}{4}=B\cdot\frac{4}{15}\in\mathbb{N}$ şi $B:1,(7)=B:\frac{16}{9}=B\cdot\frac{9}{16}\in\mathbb{N}$	**2p**
	Rezultă că $B=[12,15,16]=16\cdot3\cdot5=240$.	**3p**
	Media aritmetică a numerelor A şi B este: $(A+B):2=(240+3):2=121{,}5$.	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Desen corect	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}[AD]\equiv[DB]\\ A\hat{D}E\equiv B\hat{D}E\\ [DE]\equiv[DE]\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADE\equiv\Delta BDE$	**3p**
	$\Delta ADE\equiv\Delta BDE\Rightarrow[AE]\equiv[BE]$. Deci triunghiul ABE este isoscel.	**2p**
b)	$P_{ABE}=2\cdot BE+AB$. Deoarece $P_{ABE}=38\,cm$ şi $AB=14\,cm$, rezultă că $2BE+14\,cm=38\,cm\Rightarrow BE=(38\,cm-14\,cm):2=12\,cm$. Deci $EC=BC-BE=18\,cm-12\,cm=6\,cm$	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen corect	**2 p**
	Notăm m($\measuredangle AOQ$) = $m(\measuredangle QOP)$ =a, a>0	**1 p**
	Avem $m(\measuredangle AOP)=2a$, $m(\measuredangle AOM)=4a$	**2 p**
	Din $m(\measuredangle POB)=60^\circ$ avem $m(\measuredangle BOM)=60^\circ-2a$	**1 p**
	$m(\measuredangle BON)=30^\circ-a$	**1 p**
	$m(\measuredangle NOQ)=m(\measuredangle NOB)+m(\measuredangle BOP)+m(\measuredangle POQ)=30^\circ-a+60^\circ+a=90^\circ$	**2 p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A VII-A

1.) Se dă $n=(-1)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-3)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot(-5)^{-5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{-6}$. Determinaţi cel mai mare număr întreg nenul m, astfel încât $\sqrt{2\cdot\sqrt{n\cdot m}}\in\mathbf{Q}$.

2.) Alinei i-a plăcut un pulover, l-a şi cumpărat cu 80% din banii pe care îi avea. Mai târziu a primit de la bunica sa pentru ziua ei de naştere 30 lei. Şi-a dat seama că dacă ar mări banii aşa adunaţi cu 25%, ar avea atâţia bani câţi a avut înaintea cumpărării bluzei. Câţi bani a avut iniţial Alina?

3.) Se consideră un triunghi ABC și punctele $M\in[AB]$ şi $N\in[AC]$ astfel încât $AM=3\cdot MB$ şi $4\cdot AN=3\cdot AC$.

a) Demonstrați că dreptele MN și BC sunt paralele.

b) Să se determine raportul ariilor triunghiurilor AMN şi ABC.

4.) În paralelogramul $ABCD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAD$ intersectează dreapta DC în E, iar dreapta BE intersectează dreapta AD în F. Să se arate că: $\frac{AF}{AD}-\frac{AD}{AC}=1$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A VII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$n=-1\cdot 2^2\cdot(-3)^{-3}\cdot 4^4\cdot(-5)^5\cdot 6^6=-2^2\cdot 3^{-3}\cdot 2^8\cdot 5^{-5}\cdot(2\cdot 3)^6$	**1p**
	$n=-2^{16}\cdot 3^3\cdot 5^{-5}=\frac{-2^{16}\cdot 3^3}{5^5}$	**3p**
	$\sqrt{n\cdot m}\in Q\Rightarrow m\in Z_-$	**2p**
	$\sqrt{2\cdot\sqrt{n\cdot m}}=\sqrt{\sqrt{4\cdot n\cdot m}}\in Q\Rightarrow\sqrt{\sqrt{-2^2\cdot\frac{2^{16}\cdot 3^3}{5^5}\cdot m}}=\sqrt{\sqrt{-\frac{2^{18}\cdot 3^3}{5^5}\cdot m}}\in Q\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m=-3\cdot 5\cdot 2^2\cdot k^4=-60k^4$ de unde pentru $k=1\Rightarrow m_{\max}=-60$	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Notăm cu x suma iniţială. După cumpărarea bluzei Alina va avea $100\%-80\%=20\%$ din banii săi, deci $x\cdot\frac{20}{100}$.	**1p**
	$x\cdot\frac{20}{100}+30+x\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{1}{4}+30\cdot\frac{1}{4}=x$	**3p**
	$30+7{,}5=x\cdot\left(1-\frac{20}{100}-\frac{5}{100}\right)\Rightarrow 37{,}5=x\cdot\frac{75}{100}$	**3p**
	$x=37{,}5\cdot\frac{100}{75}\Rightarrow x=\frac{3750}{75}=50$ Deci Alina a avut iniţial 50 de lei.	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\frac{AM}{MB}=\frac{3}{1}$	**2p**
	$\frac{AN}{AC}=\frac{3}{4}$, deci $\frac{AN}{NC}=\frac{3}{1}$	**2p**
	Folosirea teoremei reciproce a teoremei lui Thales	**2p**
b)	$\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{3}{4}$ de unde obținem $\frac{A_{AMN}}{A_{ABC}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$DE\parallel AB\Rightarrow\sphericalangle AFB\sim\sphericalangle DFE\Rightarrow\frac{AF}{DF}=\frac{AB}{DE}\Leftrightarrow\frac{AF}{AF-DF}=\frac{AB}{AB-DE}\Leftrightarrow$	**3p**
	$\frac{AF}{AD}=\frac{AB}{EC}$ (1)	**1p**
	În $\sphericalangle DAC$, AE bisectoare $\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{EC}$ (2)	**2p**
	Din (1) şi (2) $\Rightarrow\frac{AF}{AD}-\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{EC}-\frac{DE}{EC}=\frac{EC}{EC}=1.$	**3p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A VIII-A

1.) **a)** Se consideră mulţimea $A=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Arătaţi că $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in A$.

b) Fie $A=\sqrt{2^{2014}+2^{1008}+1}$ şi $B=\sqrt{2^{2016}-2^{1010}+2^{1009}+1}$.

Arătaţi că A şi B sunt numere naturale şi determinaţi câte numere naturale sunt în intervalul $(A;B)$.

2.) Numerele pozitive *a, b, c* verifică egalitatea $a^2b+a^2c+2abc=2a^3+b^2c+bc^2$. Arătaţi că unul dintre ele este media aritmetică sau media geometrică a celorlalte două.

3.) Pe planul triunghiului dreptunghic ABC având catetele $AB=2\sqrt{3}$ cm şi $AC=4$ cm, se ridică, de aceeaşi parte, perpendicularele $AM=2$ cm şi $BN=1$ cm.

a) Verificaţi, dacă triunghiul *NMC* este dreptunghic.

b) Determinaţi distanţa de la punctul M la dreapta de intersecţie a planelor (ABC) şi (MNC).

4.) În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB=6$ cm, $BC=3$ cm şi $AA'=3\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:

a) Sinusul unghiului determinat de dreptele AD' şi BC.

b) Distanţa de la punctul C la dreapta AD'.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

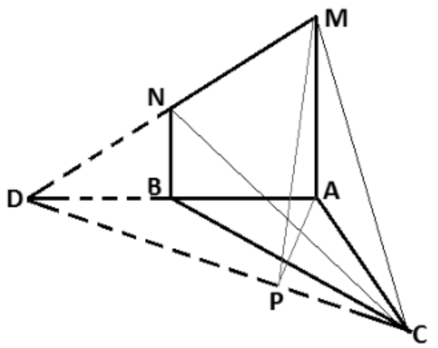
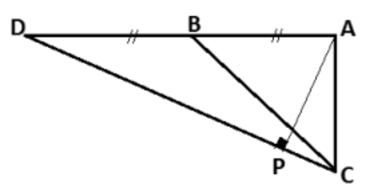
28 februarie 2015

BAREM

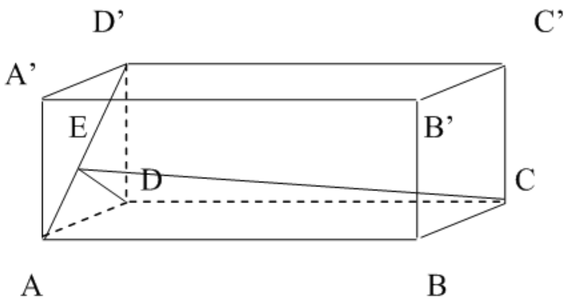
CLASA A VIII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2}$	**2p**
	a = 2, b = 1	**1p**
b)	$A=\sqrt{2^{2014}+2^{1008}+1}=\sqrt{\left(2^{1007}\right)^2+2\cdot 2^{1007}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(2^{1007}+1\right)^2}=2^{1007}+1\in\mathbb{N}$	**2p**
	$B=\sqrt{2^{2016}-2^{1010}+2^{1009}+1}=\sqrt{\left(2^{1008}\right)^2-2^{1009}\cdot\left(2-1\right)+1}=$ $=\sqrt{\left(2^{1008}\right)^2-2\cdot 2^{1008}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(2^{1008}-1\right)^2}=2^{1008}-1\in\mathbb{N}$	**2p**
	Numărul numerelor naturale din intervalul $(A;B)=\left(2^{1007}+1;\,2^{1008}-1\right)$ este $2^{1008}-1-\left(2^{1007}+1\right)-1=2^{1008}-2^{1007}-3=2^{1007}\cdot\left(2-1\right)-3=2^{1007}-3$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Egalitatea se scrie: $a^2b+a^2c+2abc-2a^3-b^2c-bc^2=0$	**1p**
	$a^2\left(b+c\right)-2a\left(a^2-bc\right)-bc\left(b+c\right)=0$	**2p**
	$\left(b+c\right)\left(a^2-bc\right)-2a\left(a^2-bc\right)=0$	**2p**
	$\left(a^2-bc\right)\left(b+c-2a\right)=0$	**1p**
	$a^2-bc=0$ sau $b+c-2a=0$	**1p**
	$a^2=bc$ sau $b+c=2a$	**1p**
	Deci *a* este media geometrică sau media aritmetică a numerelor *b* și *c*.	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	 	**1p**
a)	Prin calcul direct se determină $BC=\sqrt{28}$ cm, $MC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ cm, $NC=\sqrt{29}$ cm și $MN=\sqrt{13}$ cm.	**2p**
	$\Delta MNC:\sqrt{13}<\sqrt{20}<\sqrt{29}$, $\sqrt{29}^2\neq\sqrt{13}^2+\sqrt{20}^2 \overset{recTP}{\Rightarrow}$ nu este dreptunghic	**1p**

b)	determinarea dreptei de intersecţie: $MN \cap AB = \{D\}$, $(ABC) \cap (MNC) = DC$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l} M \notin (ABC),\ DC \subset (ABC) \\ MA \perp (ABC) \\ AP \perp DC \end{array}\right\} \xRightarrow{t3\perp} MP \perp DC \Rightarrow MP = d(M, DC)$	**1p**
	$MA \perp AB, NB \perp AB \Rightarrow MA \parallel NB$ şi $NB = \dfrac{MA}{2} \Rightarrow NB$ linie mijlocie în ΔMDA. Deci $DB = BA = 2\sqrt{3}$ cm şi $AD = 4\sqrt{3}$ cm.	**1p**
	$\Delta DAC : t.Pit. \Rightarrow DC = 8$ cm, înălţimea $AP = \dfrac{AD \cdot AC}{DC} \Rightarrow AP = 2\sqrt{3}$ cm $\Delta MAP : t.Pit. \Rightarrow MP = 4\text{ cm} = d(M, DC)$	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen: 	**1p**
a)	$DA \parallel BC \Rightarrow m(\widehat{AD'; BC}) = m(\widehat{AD'; AD}) = m(\widehat{D'AD})$ $\sin \widehat{D'AD} = \dfrac{D'D}{AD'}$	**2p**
	$D'A^2 = D'D^2 + AD^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow D'A = 3\sqrt{3}$ Deci, $\sin \widehat{D'AD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$	**2p**
b)	Fie $DE \perp AD', E \in AD'$ $CD \perp AD; CD \perp D'D; AD, D'D \subset (ADD'); AD \cap D'D = \{D\} \Rightarrow CD \perp (ADD')$ $CD \perp (ADD'), AD' \subset (ADD'), DE \perp AD' \Rightarrow CE \perp AD'$. Deci $d(C; AD') = CE$.	**2p**
	$DE \cdot AD' = DD' \cdot AD \Rightarrow DE = \dfrac{AD \cdot DD'}{AD'} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ $CD \perp (ADD'), DE \subset (ADD') \Rightarrow CD \perp DE \Rightarrow CE^2 = CD^2 + DE^2 = 6^2 + \sqrt{6}^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow CE = \sqrt{42}$. Deci $d(C; AD') = \sqrt{42}$ cm.	**2p**