INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

SSMR DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere naturale diferite, astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci cel puţin unul dintre ele este multiplu de 5.

G.M. 2014

SUBIECTUL 2

Se consideră numărul $N = \overline{abcdef}$. Să se demonstreze că numărul N este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă $\overline{ef} + 2\cdot\overline{cd} + 4\cdot\overline{ab}$ este divizibil cu 7.

Folosind eventual acest rezultat să se arate că numărul $\overline{1.....12....2....9.....9}$ este divizibil cu 7, ştiind că fiecare cifră de la 1 la 9 apare de 12 ori.

G.M.2014

SUBIECTUL 3

a) Arătaţi că numărul 2^{20} are 7 cifre.

b) Arătaţi că numărul 2^{130} are 40 de cifre.

R.M.T.

SUBIECTUL 4

a) Aflaţi cel mai mare număr de cinci cifre care împărţit la 98 dă restul 97 .

b) Aflaţi $\overline{xy}$ ştiind că numărul $\overline{x00y21}$ împărţit la $\overline{xyyx}$ dă câtul $\overline{xy}$ şi restul $\overline{yy}$.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că numărul:

n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{70}\right)$ este natural si se divide cu 71.

G.M 2014

SUBIECTUL 2

a)Arătaţi că numărul $\frac{3^{10}+7\cdot 3^{11}}{8\cdot 3^{10}+3^{11}}$ este numar natural.

b) Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale şi 2a + 3b este divizibil cu 11 atunci fracţia $\frac{a+7b}{8a+b}$ este reductibilă.

R.M.T

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se formează unghiurile AOB, BOC, COD, DOA. Se ştie că ∢AOB şi ∢BOC sunt complementare, iar ∢AOB şi ∢COD sunt suplementare. Dacă [OM este bisectoarea ∢BOC, [ON este bisectoarea ∢COD şi [OP este bisectoarea ∢AOD, aflaţi:

a) m(∢NOP).

b) m(∢AOB), ştiind că m(∢POM)=132^0.

c) m(∢AOB), ştiind că m(∢COD) este de 4 ori mai mare decât m(∢BOC).

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 4

În acelaşi semiplan mărginit de o dreaptă d se construiesc triunghiurile isoscele congruente ABM şi CDN de baze [AB], respectiv [CD], unde A, B, C, D aparţin dreptei d în această ordine. Dacă AN $\cap$ MD = {E}, MB $\cap$ NC = {F}, AN $\cap$ MB = {P}, MD $\cap$ NC = {Q} demonstraţi că AP = DQ şi EF $\perp$ d. (Se poate utiliza teorema: Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă unghiurile de la bază sunt congruente).

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA | **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Se consideră mulţimile : A = $\left\{x \in Q \mid x = \frac{3n+2}{2n+1}, n \in Z\right\}$ **si**

B = $\left\{y \in Q \mid y = \frac{5m+3}{5m+1}, m \in Z\right\}$**. Determinaţi elementele multimii A ∩ B.**

G.M 2014

SUBIECTUL 2

Calculaţi x + y + z ştiind că $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ **şi** $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$**.**

G.M 2014

SUBIECTUL 3

În patrulaterul ABCD, m(∢A) = m(∢C) = 90^0 şi AB = AD. Dacă AM ⊥ BC, cu M ∈ (BC), arătaţi că $\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.

R.M.T

SUBIECTUL 4

În paralelogramul ABCD, AC∩BD = {O}, M este mijlocul laturii [BC]. Prin O se construieşte NP || DM, N ∈ (AD), P ∈ (BC). Dacă AM∩NP = {Q} şi CQ∩AB = {R}, arătaţi că rapoartele $\frac{AR}{AB}$ **si** $\frac{QR}{QC}$ **au aceeaşi valoare şi determinaţi această valoare.**

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi numerele raţionale x şi y ştiind că:

$16{,}5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2|\right)^2 = 10\sqrt{2}$

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 2

Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere raţionale nenule, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ atunci numărul N = $\left(\frac{ab}{c} + 1\right)\left(\frac{bc}{a} + 1\right)\left(\frac{ac}{b} + 1\right)$ este nenegativ şi $\sqrt{N}$ este rational.

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 3

În tetraedrul regulat ABCD, de muchie a, planul determinat de muchia AB şi mijlocul O al înălţimii [DG] intersectează muchia [DC] în punctul M. Aflaţi:

a) **Lungimile laturilor triunghiului ABM.**
b) **Sinusul unghiului diedru format de planul (ABM) cu planul (ABC).**

R.M.T.

SUBIECTUL 4

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AB=24 cm, AD=AA'=6 cm, se consideră pe muchiile [AB], [A'B'] şi [D'C'] punctele M, N, P, astfel încât AM =6 cm, A'N=12 cm, D'P=18 cm.

a) **Stabiliţi natura patrulaterului MNPQ şi calculaţi-i aria, unde {Q}=DC ∩ (MNP).**
b) **Determinaţi distanţa de la punctul B la planul (MNP).**

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

BAREME

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Presupunem că nici un număr nu este multiplu de 5.	**2p**
Rezultă $u(a^2)$, $u(b^2)$ şi $u(c^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$, $u(x)$ fiind ultima cifră a lui x.	**2p**
De aici rezultă că $u(b^2 + c^2) \in \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$.	**2p**
Contradicţie cu $u(a^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

Dacă $A = \overline{ef} + 2\cdot \overline{cd} + 4\cdot \overline{ab}$, atunci $N - A = 98\cdot \overline{cd} + 9996\cdot \overline{ab} = 7(14\cdot \overline{cd} + 1428\cdot \overline{ab}) \vdots 7$.	**2p**
Egalitatea anterioară demonstrează ambele implicaţii: $N \vdots 7$ dacă şi numai dacă $A \vdots 7$.	**2p**
Numărul $N = \overline{1\ldots12\ldots2\ldots9\ldots9}$ este divizibil cu 111111 care este divizibil cu 7.	**2p**
Numărul 111111 este divizibil cu 7 se arată fie utilizând rezultatul anterior, fie $111111 \vdots 1001$ şi $1001 \vdots 7$, fie $111111=7\cdot 15873$.	**1p**

SUBIECTUL 3

Se arată că: $10^6 < 2^{20} < 10^7$ sau se calculează $2^{20} = 1048576$.	**3p**
Trebuie arătat că $10^{39} < 2^{130} < 10^{40}$.	**2p**
Prima parte a inegalităţii se obţine din $(10^3)^{13} < (2^{10})^{13} \Leftrightarrow 1000^{13} < 1024^{13}$ (A).	**1p**
A doua parte se obţine din $(2^{13})^{10} < (10^4)^{10} \Leftrightarrow 8192^{10} < 10000^{10}$ (A).	**1p**

SUBIECTUL 4

a)

$100000 = 98\cdot 1020 + 40$ sau $99999 = 98\cdot 1020 + 39$.	**1p**
Şi atunci numărul este $98\cdot 1019 + 97 = 99959$.	**2p**

b)

$\overline{x00y21} = \overline{xyyx} \cdot \overline{xy} + \overline{yy}$	**1p**
Analizând egalitatea după ultima cifră avem: $u(x\cdot y + y) = u[y(x + 1)] = 1$.	**1p**
Dacă se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, cum membrul drept este divizibil cu 11 se obţine din membrul stâng $y = x + 1$ şi atunci $u(y^2)=1$, de unde $y=9$, $x=8$ şi numărul este 89. Dacă nu se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, deoarece $x\neq0$, $y\neq1$, se analizează cazurile: $x=2, y=7$; $x=6, y=3$; $x=8, y=9$;	**2p**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

n = $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70 + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70\cdot\frac{1}{3} + \ldots + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70\cdot\frac{1}{70}$.	1p
n = $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70 + 1\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot70 + 1\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot70 + \ldots + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot69$.	1p
Ceea ce înseamnă că n este număr natural.	1p
n are 70 de termeni şi se grupează câte 2 termenii egal depărtaţi de capete.	1p
n = $(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot70+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot69)+(1\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot70+1\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot68\cdot70)+\ldots+(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot34\cdot36\cdot\ldots\cdot70 + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot35\cdot37\cdot\ldots\cdot70)$.	1p
n = $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot69\,(70 + 1) + 1\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot68\cdot70\,(69 + 2) +\ldots+(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot34\cdot37\cdot\ldots\cdot70\,(36 + 35)$.	1p
Cum suma din fiecare paranteză este 71, rezultă că n se divide cu 71.	1p

SUBIECTUL 2

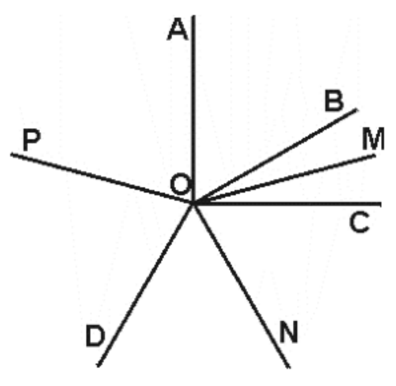
a)

$\frac{3^{10}+7\cdot3^{11}}{8\cdot3^{10}+3^{11}} = \frac{3^{10}(1+7\cdot3)}{3^{10}(8+3)} =$	1p
$= \frac{3^{10}\cdot22}{3^{10}\cdot11} = 2 \in \mathbb{N}$.	1p

b)

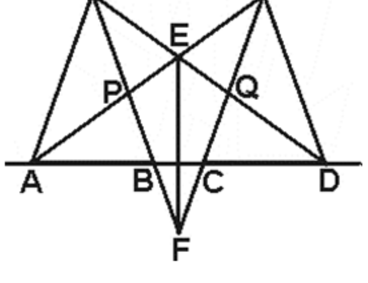
2a + 3b = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ 6(2a + 3b) = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ 12a + 18b = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ a + 7b = $\mathcal{M}_{11}$ (1).	2p
Apoi 2a + 3b = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ 4(2a + 3b) = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ 8a + 12b = $\mathcal{M}_{11} \Rightarrow$ 8a + b = $\mathcal{M}_{11}$ (2).	2p
Din (1) şi (2), rezultă că fracţia $\frac{a+7b}{8a+b}$ este reductibilă.	1p

SUBIECTUL 3



a) m(∢NOP) = ($360^0 - 90^0$):2 = 135^0.	3p
b) Dacă m(∢AOB) = x, m(∢BOC) = y, m(∢COD) =z, m(∢DOA) =t, avem $x + \frac{y}{2} + \frac{t}{2} = 132^0$, rezultă $2x + y + t = 264^0$, dar $y + t = 180^0$, de unde $2x=84^0$ şi $x = 42^0$.	2p
c) z = 4y şi $x + z = 180^0$, rezultă $x + 4y = 180^0$, dar $x + y = 90^0$, de unde $3y=90^0$; $y = 30^0$ şi atunci $x = 60^0$.	2p

SUBIECTUL 4



ΔADN≡ΔDAM(LUL) $\Rightarrow$ ∢MDA≡∢NAD.	1p
ΔPAB≡ΔQDC(ULU) $\Rightarrow$ AP = DQ.	2p
∢MDA≡∢NAD, rezultă AE=DE, dar AP = DQ se obţine PE=QE(1).	1p
∢FBC≡∢FCB(fiind opuse la vârf cu unghiurile de la bazele triunghiurilor isoscele congruente) $\Rightarrow$ FB=FC, dar PB = QC din ΔPAB≡ΔQDC, se obţine PF=QF(2).	1p
Din (1) şi (2), rezultă ΔEPF≡ΔEQF(LLL), de unde ∢EFP≡∢EFQ şi atunci [FE este bisectoarea unghiului BFC, dar ΔFBC este isoscel, rezultă EF $\perp$ d. Obs. Se va urmări echivalenţa punctajului pentru fiecare cale de rezolvare.	2p

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Dacă $z \in A \cap B$, atunci există n şi m numere întregi, astfel încât $\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{5m+3}{3m+1}$.	**2p**
Se obţine $n = \frac{m-1}{m+3} = 1 - \frac{4}{m+3}$.	**2p**
Cum $n \in \mathbb{Z}$, rezultă $\frac{4}{m+3} \in \mathbb{Z}$, de unde $m \in \{-7; -5; -4; -2; -1; 1\}$.	**2p**
Rezultă $A \cap B = \left\{\frac{8}{5}; \frac{11}{7}; \frac{17}{11}; \frac{7}{5}; 1; 2\right\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

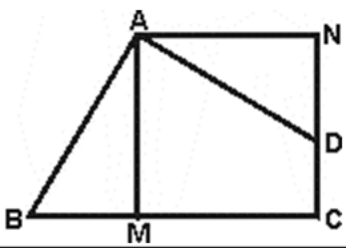
VARIANTA 1 DE NOTARE

Egalitatea $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ implică $\frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z}$.	**1p**
De unde $1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z}$.	**1p**
Şi atunci $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$.	**1p**
Cu $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$, se obţine $\frac{3}{x} = 54$ şi $x = \frac{1}{18}$.	**2p**
$y = \frac{1}{9}$ şi $z = \frac{1}{6}$.	**1p**
$x + y + z = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE

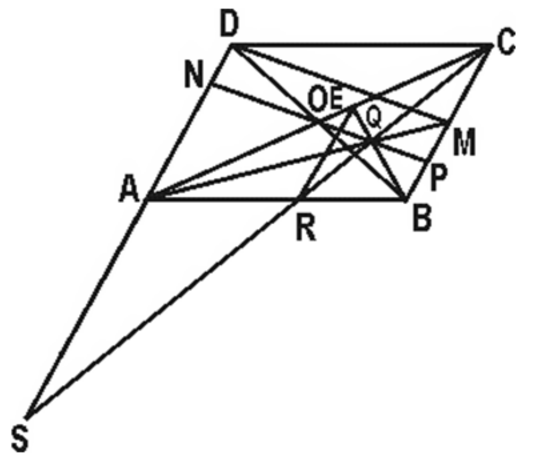
Egalitatea $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2}$ implică $x(y+2) = y(x+1)$ şi se obţine $y = 2x$.	**2p**
Analog din $\frac{x}{x+1} = \frac{z}{z+3}$ se obţine $z = 3x$.	**1p**
Şi atunci $\frac{1}{x} + \frac{2}{2x} + \frac{3}{3x} = 54$, de unde $x = \frac{1}{18}$.	**2p**
$y = \frac{1}{9}$ şi $z = \frac{1}{6}$.	**1p**
$x + y + z = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.	**1p**

SUBIECTUL 3



Fie $AN \perp DC$, $N \in DC$.	**1p**
$\Delta ABM \equiv \Delta ADN$ (IU) $\Rightarrow AN = AM$.	**2p**
AMCN este pătrat.	**1p**
$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \mathcal{A}_{[AMCN]}$.	**2p**
$\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.	**1p**

SUBIECTUL 4



	Fie $\{E\}=AC \cap BQ$. Aplicând teorema lui Ceva în ΔABC avem: $\frac{RA}{RB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{EA}=1 \Rightarrow \frac{RA}{RB}=\frac{EA}{EC} \Rightarrow RE \parallel BC$.	2p
	Şi atunci $\frac{AR}{AB}=\frac{RE}{BC}=\frac{QR}{QC}$.	1p
	Apoi pentru calcularea valorii, fie $CQ \cap AD=\{S\}$. În ΔBMD, $OB=OD$ şi $OP \parallel DM \Rightarrow PM=PB$. Avem $\frac{PM}{BC}=\frac{1}{4}$.	1p
	PMDN fiind paralelogram, rezultă PM=DN şi $\frac{PM}{AN}=\frac{1}{3}$.	1p
	Avem: $\frac{1}{3}=\frac{PM}{AN}=\frac{QM}{AQ}=\frac{MC}{AS}$. şi de aici $AS=3\cdot MC$.	1p
	Apoi $\frac{AR}{RB}=\frac{AS}{BC}=\frac{3}{2}$, în final $\frac{AR}{AB}=\frac{3}{5}=\frac{QR}{QC}$.	1p

CLASA a VIII-a

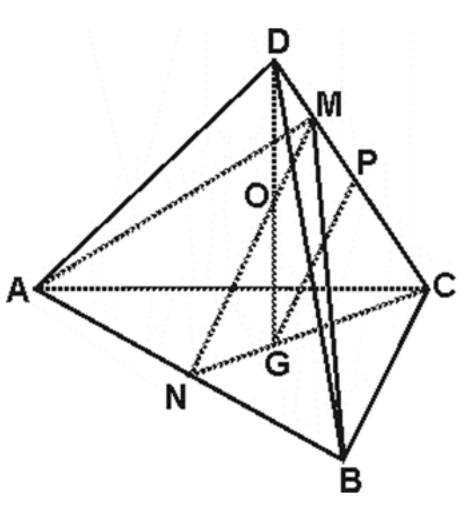
SUBIECTUL 1

Ecuaţia este echivalentă cu: $\left(\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert\right)^2=16,5-10\sqrt{2}$	1p
De unde $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\pm\sqrt{16,5-10\sqrt{2}}$	1p
Sau: $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-2\right)$	1p
Ecuaţia $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=-\frac{5}{\sqrt{2}}+2 \Leftrightarrow \frac{\lvert x-1\rvert+5}{\sqrt{2}}=\lvert y^2-2\rvert+2$ nu are soluţii raţionale.	1p
Ecuaţia $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\frac{5}{\sqrt{2}}-2 \Leftrightarrow \frac{\lvert x-1\rvert-5}{\sqrt{2}}=\lvert y^2-2\rvert-2$.	1p
$\sqrt{2}$ fiind iraţional, avem: $\lvert x-1\rvert-5=0$ şi $\lvert y^2-2\rvert-2=0$. De unde $x\in\{-4; 6\}$ şi $y\in\{-2; 0; 2\}$	1p
Se obţine $S=\{(-4;-2), (-4;0), (-4;2), (6;-2), (6;0), (6;2)\}$.	1p

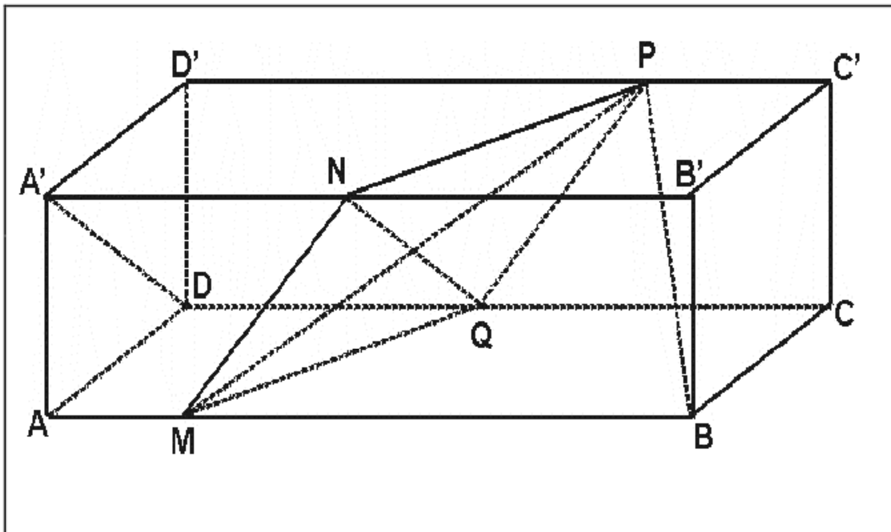
SUBIECTUL 2

Din relaţia dată se obţine $ab+bc+ca=abc$, de unde $\frac{ab}{c}=ab-a-b$	1p
Apoi $\frac{ab}{c}+1=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$.	2p
De unde $N=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2\geq 0$.	2p
Şi $\sqrt{N}=\lvert(a-1)(b-1)(c-1)\rvert\in\mathbb{Q}$.	2p

SUBIECTUL 3

	Fie N mijlocul lui [AB] şi PG $\parallel$ MN, P$\in$[DC].	1p
	OM $\parallel$ GP şi OD=OG $\Rightarrow$ DM = MP şi atunci DP=2MP. Apoi PG $\parallel$ MN $\Rightarrow$ $\frac{PC}{MP}=\frac{GC}{GN}=2$ şi atunci PC=2MP. Vom avea DP=PC=GP=$\frac{a}{2}$. Şi MN=$\frac{3}{2}PG=\frac{3a}{4}$.	2p
	Se obţine din ΔMAN sau ΔMAP că MA=$\frac{a\sqrt{13}}{4}$=MB.	2p
	MN$\perp$AB, CN$\perp$AB, rezultă unghiul diedru se află din ΔONG şi avem sin($\sphericalangle$ONG) = $\frac{OG}{ON}=\frac{a\sqrt{6}}{6}:\left(\frac{3a}{4}-\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.	2p

SUBIECTUL 4

	a) Punctele de intersecţie dintre (MNP) şi dreptele AB, A'B', D'C' şi DC formează un paralelogram, dar prin calcul MN=NP=6$\sqrt{2}$, rezultă MNPQ romb.	2p
	Cum AM+D'P=A'N+DQ, rezultă DQ=12 cm=A'N şi atunci NQ=A'D=6$\sqrt{2}$. Rombul este format din două triunghiuri echilaterale. Aria rombului = $2\cdot\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$.	2p
b) BP=6$\sqrt{3}$, MP=6$\sqrt{6}$ şi MB=18, rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora BP$\perp$MP, dar NQ $\parallel$ A'D şi A'D$\perp$(ABC'D'), rezultă BP$\perp$NQ, MP şi NQ fiind concurente dă că BP$\perp$(MNP).		2p
Distanţa de la B la (MNP) fiind BP=6$\sqrt{3}$.		1p