H U N E D O A R A Olimpiada Națională de matematică

Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Determinați numărul natural de două cifre, scris în baza 10, care, împărțit la răsturnatul său, dă câtul 2 și restul 15.

SGM 2014

2. Se consideră numerele $A = 2 + 4 + ... + 2014$ și $B = 1 + 3 + ... + 2015$.

a) Stabiliți care dintre cele două numere este mai mare.

b) Arătați că între numerele A și B nu se găsește pătratul nici unui număr natural.

3.

a) Calculați produsul $a \cdot b \cdot c$ știind că $\overline{abc} + \overline{abc2} = 2015$.

b) Determinați restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014 + 2013$ la 2015.

4. Doi elevi au șapte cartonașe albe numerotate de la 1 la 7 și șapte cartonașe roșii numerotate de la 1 la 7. Stabiliți dacă cei doi elevi pot forma perechi din câte un cartonaș alb și unul roșu, astfel încât sumele obținute adunând numerele scrise pe cartonașele din fiecare pereche să fie șapte numere naturale consecutive.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Clasa a V-a Barem

1.		Din teorema împărțirii cu rest avem $\overline{ab} = \overline{ba} \cdot 2 + 15$ avem $\overline{ab} > 15$ $10a + b = 20b + 2a + 15$ de unde obținem $8a = 19b + 15$ Finalizare a=9 și b=3	**2p** **2p** **3p**
2.	**a)**	$A = 2 + 4 + ... + 2014 = 2(1 + 2 + ... + 1007) = 2 \cdot 1007 \cdot 1008 : 2 = 1007 \cdot 1008$ $B = 1 + 3 + ... + 2015 = 1008^2$ Finalizare $B > A$	**1p** **2p** **1p**
	b)	$1007^2 < 1007 \cdot 1008 < 1008^2$ Finalizare	**1p** **2p**
3.	**a)**	Egalitatea se mai scrie: $\overline{abc} + 10 \cdot \overline{abc} + 2 = 2015 \Leftrightarrow 11 \cdot \overline{abc} = 2013 \Leftrightarrow \overline{abc} = 183$. De unde obținem $a = 1,\ b = 8,\ c = 3$ Finalizare $a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 8 \cdot 3 = 24$.	***2p*** **1p** **1p**
	b)	Din faptul că $2015 = 1 \cdot 5 \cdot 403$ rezultă $2015 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014$ Finalizare	**1p** **1p** **1p**

4.

Presupunem că cei doi elevi pot obține o împărțire a cartonașelor în perechi cu cele șapte sume numere naturale consecutive. Atunci sumele obținute ar fi $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ ...,\ a+6$

și $a + a + 1 + a + 2 + ... + a + 6 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 7)$ **2p**

$7 \cdot a + 6 \cdot 7 : 2 = 2 \cdot (7 \cdot 8 : 2) \Leftrightarrow 7 \cdot a + 21 = 56 \Rightarrow a = 5$ **1p**

Sumele în perechi sunt $5,6,7,8,9,10,11$. **2p**

2p

O grupare ar fi :

Nr. cartonaș alb	1	2	3	4	5	6	7
Nr. cartonaș roșu	7	5	2	6	1	3	4
Suma în pereche	8	7	5	10	6	9	11

H U N E D O A R A Olimpiada Națională de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{6^6}$ este număr natural.

SGM 2014

2. **(i)** Demonstrați că numerele de forma $\overline{aaaaaa}$ sunt divizibile cu 7, unde $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

(ii) Demonstrați că numărul $\overline{1...12...23...9...9}$ este divizibil cu 7, știind că fiecare cifră de la 1 la 9 apare de 12 ori.

SGM 2014

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $[BC]$, D mijlocul laturii $[AB]$, E mijlocul laturii $[AC]$. Pe semidreapta $(BE$ se consideră punctul P astfel încât $[AP]\equiv[AB]$, iar punctul F este mijlocul segmentului $[AP]$. Demonstrați că:

(i) $[BE]\equiv[CD]$;

(ii) $CD+CF=BP$.

4. Se consideră 300 de puncte coliniare. Trei copii colorează aceste puncte după cum urmează. Primul copil colorează cu verde primele trei puncte, apoi sare peste unul, apoi iar colorează următoarele trei și iar sare peste unul și așa mai departe până la finalul celor 300 de puncte. Al doilea copil realizează de la început o recolorare asemănătoare, dar cu albastru și colorează primele patru puncte, apoi sare unul, și iar următoarele patru și sare peste unul etc. Al treilea copil recolorează cu maro câte cinci puncte și sare peste unul și apoi următoarele cinci etc. Câte puncte au rămas la final necolorate?

SGM 2014

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Clasa a VI-a Barem

1.		
	Întrucât $6^6 = 2^6 \cdot 3^6$, numărul $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{6^6}$ este natural dacă	**1p**
		1p
	$2^6 / 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, *respectiv* $3^6 / 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$	**2p**
	Finalizare $n = 15$	**3p**

2. (i)	$\overline{aaaaaa} = a\cdot 111111$	**1p**
	$7/111111 \Rightarrow 7/a\cdot 111111$, unde $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	**1p**
	Finalizare	**1p**
(ii)	Numărul $\overline{1...12...23...9...9}$ conține secvențe de 12 cifre de forma $\overline{a...a}$	**2p**
	Numărul poate fi scris sub forma $9\cdot 1...1 + 8\cdot 1...1\cdot 10^{12} + ...$	**1p**
	Finalizare	**1p**

3.		
(i)	Avem $AD = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} = AE$, $[AD] \equiv [AE]$	**1p**
	$[AB] \equiv [AC]$, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAD$ (unghi comun), $[AE] \equiv [AD] \overset{(LUL)}{\Rightarrow}$ $\Delta ABE \equiv \Delta ACD \Rightarrow [BE] \equiv [CD]$	**2p**
(ii)	Punctul F este mijlocul segmentului $[AP]$ și $[AP] \equiv [AB]$.	
	Rezultă $AF = \dfrac{AP}{2} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} = AE$, $[AF] \equiv [AE]$.	**1p**
	$[AC] \equiv [AP]$, $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle PAE$ (unghi comun), $[AF] \equiv [AE] \overset{(LUL)}{\Rightarrow} \Delta ACF \equiv \Delta APE, CF = PE$	**2p**
	Finalizare $CD + CF = BE + EP = BP$	**1p**
4.		
	Primul copil lasă tot al patrulea punct necolorat cu verde.	**1p**
	Al doilea copil lasă necolorat cu albastru din cinci în cinci puncte.	**1p**
	Al treilea copil lasă necolorat cu maro din 6 în șase puncte.	**1p**
	Rămân punctele necolorate care sunt multiplii de 4,5, respectiv 6	**1p**
	cmmmc [4,5,6]=60	**1p**
	Finalizare 3 puncte	**2p**

Notă Se punctează orice altă soluție corectă.

H U N E D O A R A **Olimpiada de matematică**

Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VII-a

1.

(i) Să se arate că $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Să se compare numerele *3A* și *B*, unde $A=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{97}}$ și

$B=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{98}}$.

2.

(i) Dacă $x \in \mathbb{N}$ și *3* nu divide pe x, arătați că restul împărțirii lui x^2 la *3* este egal cu *1*.

(ii) Dacă numerele $a,b,c \in \mathbb{N}$ nu sunt divizibile cu *3*, demonstrați că numărul $u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}$ este irațional.

GM 2014

3. Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ şi M mijlocul lui $[AC]$, iar $N \in AB, B \in (AN)$ astfel încât $BN=AM$. Dacă $\{O\}=MN \cap BC$, să se arate că:

(i) Punctul *O* este mijlocul lui $[MN]$.

(ii) $OC=3 \cdot OB$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Clasa a VII-a Barem

1.			
	(i)	Se ridică la pătrat $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.	**1p**
		Finalizare	**2p**
	(ii)	Inegalitatea (i) devine $\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.	**2p**
		Prin însumare obținem $3A<B$	**2p**

2.	**(i)**	Dacă $x\in\mathbb{N}$ și *3* nu divide pe x, atunci $x=3p\pm1, p\in\mathbb{N}$	**1p**
		$x^2=(3p\pm1)^2=\mathrm{M}_3+1$	**2p**
	(ii)	$u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}=\sqrt{M_3+2}$	**2p**
		Finalizare	**2p**

3.			
	(i)	Fie ABCD un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și O punctul de intersecție al diagonalelor. Triunghiurile dreptunghice determinate de diagonale sunt isoscele. Inălțimea dusă prin intersecția diagonalelor formează segmente ce sunt mediane.	***2p***
		Finalizare	**1p**
	(ii)	Reciproc. Fie OP și OR proiecțiile punctului O pe AB, respectiv CD.	**1p**
		Din asemănarea tr. AOB și tr. DOC rezultă $\frac{PR}{OP}=\frac{AB+DC}{AB}$, dar $\frac{AB+DC}{2}=PR$	**1p**
		În tr. AOB isoscel, $OP=\frac{AB}{2}$	**1p**
		Finalizare	**1p**
4.			
	(i)	Fie P mijlocul lui BC. Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul CAB, deducem că $MP=\frac{AB}{2}=\frac{AC}{2}=AM$ şi $MP\parallel BN$.	**1p**
		Cum $BN=AM$ rezultă că $MP=BN$.	**1p**
		Deducem MNBP paralelogram, deci O, care este intersecţia diagonalelor BP şi MN, este mijlocul lui $[MN]$.	**2p**
	(ii)	Deoarece MBNP este paralelogram $OB=OP$ deci $OB=OP=\frac{BP}{2}=\frac{BC}{4}$. Cum	**1p**
		$OC=OP+PC=\frac{BC}{4}+\frac{BC}{2}=\frac{3BC}{4}$, se obţine tocmai condiţia cerută.	**2p**

H U N E D O A R A **Olimpiada de matematică**

Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1.

(i) Să se arate că pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$4(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.

(ii) Dacă $u,v,t \in \mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte pare, arătați că $u+v+t$ este suma a patru pătrate perfecte.

2.

(i) Dacă $t \in \mathbb{R}^*$ și $t-\frac{3}{t}=2$, să se arate că $t \in \{-1,3\}$.

(ii) Numerele reale a și b verifică egalitatea $a^2 \cdot b^{-2} - 3a^{-2} \cdot b^2 = 2$. Să se arate că a și b nu pot fi simultan raționale.

GM 2014

3. Într-un paralelipiped dreptunghic suma tuturor muchiilor este 76 cm, iar lungimea diagonalei este 13 cm. Calculaţi $(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(a+b-c)\cdot(-a+b+c)+(a-b+c)\cdot(-a+b+c)$, unde a,b și c sunt dimensiunile paralelipipedului.

SGM 2015

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu muchiile opuse perpendiculare. Fie $AE \perp BC$, $E \in BC$, $AF \perp CD$, $F \in CD$. Fie $BF \cap DE = \{R\}$ şi $CR \cap BD = \{J\}$.

(i) Demonstraţi că $DE \perp BC$.

(ii) Demonstraţi că $AJ \perp BD$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Clasa a VIII-a Barem

1.

(i) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ **1p**

Finalizare **2p**

(ii) $u=(2n)^2, v=(2m)^2, u=(2p)^2$ unde m,n,p sunt numere naturale. **1p**

Se aplică rezultatul din (i). **3p**

2. **(i)** Se aduce la forma $t^2-2t-3=0$ **1p**

de unde, prin descompunere $(t+1)(t-3)=0$ rezultă $t\in\{-1,3\}$. **2p**

(ii) Se notează $\frac{a^2}{b^2}=t$ ecuația $a^2\cdot b^{-2}-3a^{-2}\cdot b^2=2$ devine $t-\frac{3}{t}=2$ **2p**

$\frac{a^2}{b^2}=-1$ nu are soluții reale. $\frac{a^2}{b^2}=3$ implică $a^2=3b^2$ **1p**

Finalizare **1p**

3.

Fie S suma tuturor muchiilor, atunci $S=4(a+b+c)=76$, de unde $a+b+c=19$ **2p**

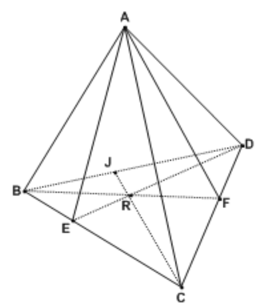
Din $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13$ se obţine $a^2+b^2+c^2=169$ **2p**

$E=(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)$ **2p**

Finalizare $E=19^2-2\cdot169=361-338=23$ **2p**

4.

(i) **3p**



Din ipoteză obţinem $BC\perp(AED)$, deci $BC\perp DE$.

(ii)

Analog $CD\perp BF$, deci R este ortocentrul triunghiului BCD. **2p**

Atunci $CR\perp BD$, $BD\perp(ACR)$ şi concluzia **2p**