SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

CLASA aV-a

Problema 1. (7 puncte)

Fie numerele naturale x şi y care satisfac relaţia: $5x+3y=2015$.

a). Arătaţi că suma celor două numere nu poate fi 462.

b). Aflaţi cele două numere ştiind că suma lor este 463.

Problema 2. (7 puncte)

Arătaţi că dublul sumei numerelor naturale, care împărţite la 2015 dau câtul egal cu restul, nu este pătrat perfect.

Problema 3. (7 puncte)

Determinaţi elementele mulţimilor A *şi* B *dacă sunt satisfăcute simultan* condiţiile:

a). A are trei elemente numere naturale pare consecutive;

b). B are trei elemente numere naturale impare consecutive;

c). Cel mai mic element al mulţimii B este succesorul celui mai mare element al mulţimii A;

d). Suma elementelor mulţimii $A \cup B$ este egală cu 2043.

Problema 4. (7 puncte)

Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel:
$\{1\}$, $\{3,5\}$, $\{7,9,11\}$, $\{13,15,17,19\}$, . . .

a) Aflaţi care este primul număr din cea de a 2014-a submulţime.

b) Există o submulţime de acest tip care începe cu 2013? Justificaţi răspunsul.

● **Notă**: Toate subiectele sunt obligatorii
● Timp de lucru: 2 ore
●Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA

Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
Olimpiada de matematica - 2015

CLASA aVI-a

Subiectul I (7 puncte)

a)Sa se determine $a,b \in \mathbb{N}$,$a<b$ pentru care $[a,b]=540$ si $(a,b)=18$

b) Aratati ca : $\frac{1}{1\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 25}+\frac{1}{25\cdot 37}+............+\frac{1}{2005\cdot 2017}<\frac{1}{12}$

Subiectul II (7 puncte)

Aratati ca :$3^{2014}+4^{2014}<5^{2014}$ G.M

Subiectul III (7 puncte)

Pe o dreapta a se considera punctele $A_o,A_1,A_2,........A_{2015}$ astfel incat $A_oA_1=A_1A_2,,A_oA_2=A_2A_3,A_oA_3=A_3A_4,........A_oA_{2014}=A_{2014}A_{2015}$ Stiind ca $A_{2014}A_{2015}=2^{2014}$ cm, calculati A_0A_1, $A_{2005}A_{2015}$ si determinati cel mai mic numar natural k asa incat $A_0A_k > 1$ km

Subiectul IV (7 puncte)

Fie unghiul propriu XOY si punctele A,C∈Ox,iar B,D∈Oy asa incat [OA]=[OB] si [AC]=[BD] și A între O și C, B între O și D.Stiind ca AD∩BC={P}, demonstrati ca: a)[AP]=[PB]

b) [OP este bisectoarea unghiului XOY

c)punctele O,P,M,N sunt coliniare, unde M si N sunt mijloacele segmentelor [AB] respectiv [CD]

- **Notă**: Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 2 ore
- Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA

Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

CLASA aVII-a

Problema 1. (7 puncte)

a). Să se calculeze:

$$\mathrm{A}=\frac{4-2}{3\cdot 1}+\frac{6-4}{5\cdot 3}+\frac{8-6}{7\cdot 5}+\cdots+\frac{2016-2014}{2015\cdot 2013}.$$

b). Determinaţi cel mai mic număr întreg care este mai mare decât x, unde

$$x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{12}+\sqrt{16}+\sqrt{20}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Problema 2. (7 puncte)

Fie numerele $\mathrm{a}_1=\sqrt{1}$, $\mathrm{a}_2=\sqrt{3+5}$, $\mathrm{a}_3=\sqrt{7+9+11}$, $\mathrm{a}_4=\sqrt{13+15+17+19}$, ...

a). Calculaţi a_9.

b). Câte numere $\mathrm{a}_k, k\in\mathrm{N}^*, k\leq 2015$, sunt numere iraţionale.

Problema 3. (7 puncte)

În paralelogramul $ABCD$ cu $AB=2\cdot BC$, se construieşte $[AM$ bisectoarea $\angle DAB$, $M\in[DC]$. Perpendiculara în A pe AM intersectează BC în N. Dacă $MN\cap AB=\{P\}$, aflaţi valoarea raportului $\frac{AP}{PB}$.

Problema 4. (7 puncte)

În triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ şi $m(\angle C)=30^\circ$ considerăm bisectoarea $[BE,\ E\in[AC]$ şi un punct D pe $[BC]$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi F este mijlocul lui $[AB]$, arătaţi că F, O şi C sunt coliniare.

● **Notă**: Toate subiectele sunt obligatorii
● Timp de lucru: 3 ore
●Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

CLASA aVIII-a

Subiectul I. **(7 puncte)**

a) Demonstrati egalitatea: $\frac{k}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n+k}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+k}};(\forall)n,k\in\mathbb{N}^*$

b) Aflati $n\in\mathbb{N}^*$ asftel incat:

$$\frac{13}{\sqrt{1\cdot 14}\left(\sqrt{14}+\sqrt{1}\right)}+\frac{13}{\sqrt{14\cdot 27}\left(\sqrt{27}+\sqrt{14}\right)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{13}{\sqrt{n(n+13)}\left(\sqrt{n+13}+\sqrt{n}\right)}=\frac{39}{40}$$

Subiectul II. **(7 puncte)** a)

Calculati : $\left[\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2015}+\frac{1}{(5+2\sqrt{6})^{2015}}\right]\cdot\frac{(10+4\sqrt{6})^{2015}}{2^{2016}}$

b) Determinati a,b ∈ Q,astfel incat : $a\left(\sqrt{3}+2\right)+\sqrt{3}=b\left(2\sqrt{3}+1\right)+3$

Subiectul III. **(7 puncte)**

In triunghiul ABC se cunosc: AB=AC= $2\sqrt{6}\ cm$ si $m\sphericalangle(BAC)=45^o$ Se construieste $MB\perp(ABC)$,MB=2cm .

Calculati: a) d(M,AC); b) d[B,(MAC)]; c) cos ∢ [(MAC),(MBA)]

Subiectul IV. **(7 puncte)**

Fie piramida patrulatera regulataVABCD,$\{O\}=AC\cap BD$ si P,Q∈ (VO).

Daca $\{E\}=AP\cap CV,\{F\}=CP\cap AV,\{S\}=BQ\cap DV\ si\ \{T\}=DQ\cap VB.$

Aratati ca masura unghiului dintre dreptele EF si ST nu depinde de alegerea punctelor P si Q pe segmentul VO. G.M.

● **Notă**: Toate subiectele sunt obligatorii
● Timp de lucru: 3 ore
●Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – clasa a V-a

Problema 1. a) Folosind metoda reducerii la absurd, se presupune că suma celor două numere naturale este 462. Deci $x+y=462\,\big|\cdot 3 \Leftrightarrow 3x+3y=1386$ . . . . **1 p**

Dar $5x+3y=2015 \Rightarrow 2x=629$ . . . . **1 p**

Cum 2x este par şi 629 impar obţinem $x \notin N$, contradicţie . . . . **1 p**

b) $x+y=463\,\big|\cdot 3 \Leftrightarrow 3x+3y=1389$ . . . . **1 p**

$5x+3y=2015 \Rightarrow 2x=626 \Leftrightarrow x=313$ . . . . **2 p**

$313+y=463 \Leftrightarrow y=150$ . . . . **1 p**

Problema 2. Conform teoremei împărţirii cu rest: $a=2015\cdot q+r, r<2015, r\in N$

Deoarece $q=r$ obţinem $a=2015\cdot r+r=2016\cdot r$ . . . . **1 p**

Pentru scrierea termenilor $a_0=2016\cdot 0$; $a_1=2016\cdot 1$; $a_2=2016\cdot 2$; ... ; $a_{2015}=2016\cdot 2014$ . . . . **1 p**

Calcularea $2s=2(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2015})=2\cdot 2016\cdot(0+1+2+3+\cdots+2014)=$

$=2\cdot 2016\cdot\dfrac{2014\cdot 2015}{2}=2014\cdot 2015\cdot 2016$ . . . . **2 p**

Deci dublul sumei este un produs de numere naturale consecutive care este divizibil cu 5 . . . . **1 p**

dar nu este divizibil cu 5^2 . . . . **1 p**

deci dublul sumei nu este pătrat perfect . . . . **1 p**

Problema 3. Fie a un număr par. Atunci $A=\{a; a+2; a+4\}$ . . . . **1 p**

şi $B=\{a+5; a+7; a+9\}$. . . . . **1 p**

Deoarece A are elementele numere pare şi B are elementele numere impare cele două mulţimi sunt disjuncte şi $Card(A\cup B)=6$ . . . . **1 p**

Din $A\cup B=\{a; a+2; a+4; a+5; a+7; a+9\}$ obţinem că

$a+a+2+a+4+a+5+a+7+a+9=2033 \Leftrightarrow 6a+27=2033 \Leftrightarrow a=336$ . . . . . **2 p**

Atunci $A=\{336, 338, 340\}$ . . . . **1 p**

şi $B=\{341, 343, 345\}$ . . . . **1 p**

Problema 4. a) Pentru scrierea primelor (k-1) submulţimi sunt folosite primele numere impare consecutive, deci ele conţin

$1+2+3+\cdots+(k-1)=\dfrac{(k-1)\cdot k}{2}$ numere . . . . **1 p**

Cum numerele impare sunt de forma (2n-1) obţinem că primul element al celei de a k submulţime este: $2\cdot\left[\dfrac{(k-1)\cdot k}{2}+1\right]-1=(k-1)\cdot k+2-1=k^2-k+1$ . . . . **2 p**

Deci primul element din a 2014-a submulţime este numărul ($2013\cdot 2014+1$) . . **1 p**

b) Presupunem că există o submulţime care începe cu 2013. Atunci:

$k^2-k+1=2013 \Leftrightarrow k(k-1)=2012$ . . . . **1 p**

cum (k-1) şi k sunt numere naturale consecutive şi $44\cdot 45=1980<2012<45\cdot 46=2070$ rezultă că 2012 nu poate fi scris ca un produs de două numere naturale consecutive . . . . **2 p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VI-a

1 a) Scrie relatia: $[a,b](a,b)=a\cdot b$……………………………………………………1p

Din $a\cdot b=18\cdot 540, a=18a_1, b=18b_1; (a_1,b_1)=1 \Rightarrow a_1\cdot b_1=30$.......................1p

Din $a<b \Rightarrow a_1<b_1$ Obtinem; $(a_1,b_1)\in\{(1,30);(2,15);(3,10)(5,6)\}$..................1p

Finalizare $(a,b)\in\{(18,540);(36,270);(54,180);(90,108)\}$……………………1p

b) Inegalitatea ceruta este echivalenta cu: $\frac{12}{1\cdot 13}+\frac{12}{13\cdot 25}+............\frac{12}{2005\cdot 2017}<1$……………1p

$\Leftrightarrow \frac{1}{1}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{25}+..............+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2017}<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1}-\frac{1}{2017}<1 \Leftrightarrow \frac{2016}{2017}<1$ (A), ceea ce demonstreaza inegalitatea initiala………………………..1p

2 Observa ca $5^{2014}=5^2\cdot 5^{2012}=3^2\cdot 5^{2012}+4^2\cdot 5^{2012}$........................2p

Obtine $3^{2012}<5^{2012} \Leftrightarrow 3^{2014}<3^2\cdot 5^{2012}$............2p

Analog $4^{2014}<4^2\cdot 5^{2012}$.................................2p

Finalizare………………………..1p

3 Noteaza : $A_0A_1=x \Rightarrow A_0A_2=2x, A_0A_3=2^2x, A_0A_4=2^3x, ...A_0A_{2015}=2^{2014}x$..........2p

Scrie ecuatia $A_{2014}A_{2015}=A_0A_{2015}:2 \Leftrightarrow 2^{2013}x=2^{2014} \Leftrightarrow x=2$................1p

Obtine: $A_0A_1=2cm; A_{2005}A_{2015}=A_0A_{2015}-A_0A_{2005}=2^{2015}-2^{2005}=1023\cdot 2^{2005}(cm)$...........2p

Din $A_0A_k>10^5 \Leftrightarrow 2^k>10^5 \Leftrightarrow 2^{k-5}>5^5; si\, 2^{11}<5^5<2^{12} \Rightarrow \min(k-5)=12 \Leftrightarrow k=17$..........2p

4 a) Din $\Delta AOD\equiv\Delta BOC$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle ADO=\sphericalangle BCO$...............1p $\triangle APC=\triangle BPD(LUU)\Rightarrow[AP]=[PB]$ …………………………..1p

b) $\triangle AOP\equiv\triangle BOP(LLL)\Rightarrow \sphericalangle AOP\equiv\sphericalangle BOP$.................1p Deoarece $P\in Int\sphericalangle(AOB) si \sphericalangle XOP\equiv\sphericalangle YOP\Rightarrow[OP \to bis\sphericalangle XOY$..........1p

c) Demonstreaza ca daca $OP\cap AB=\{M\}$, atunci - M, mijlocul lui [AB]

$\triangle AOM\equiv\triangle BOM(LUL)\Rightarrow[AM]=[MB]\Leftrightarrow M-mijlocul$ lui [AB]…………..1p

Analog se arata ca N este mijlocul lui [CD], unde $\{N\}=OP\cap CD$………………..1p Din M si N mijloacele [AB] respectiv [CD] si $M,N\in OP\Rightarrow O,M,P,N$- coliniare………1p

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VII-a

Problema 1. a) $A=\frac{2}{3\cdot 1}+\frac{2}{5\cdot 3}+\frac{2}{7\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{2015\cdot 2013}$ . . . . **1 p**

$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}$ . . . . **2 p**

$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$ . . . . **1 p**

b). $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{12}+\sqrt{16}+\sqrt{20}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)+2\cdot\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\sqrt{2}+2$ . . . . **1 p**

Scrierea relaţiei $1<\sqrt{2}<2 \Leftrightarrow 3<\sqrt{2}+2<4$ . . . . **1 p**

Concluzia: cel mai mic număr natural mai mare decât x este 4 . . . . **1 p**

Problema 2 a) se observă că: $a_1 = \sqrt{1} = \sqrt{1^3} = 1 \cdot \sqrt{1}$

$a_2 = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2 \cdot \sqrt{2}$; $a_3 = \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3 \cdot \sqrt{3}$; $a_4 = \sqrt{64} = \sqrt{4^3} = 4 \cdot \sqrt{4}$; ...

în general numerele au forma $a_k = \sqrt{k^3} = k \cdot \sqrt{k}$ . . . . **2 p**

deci $a_9 = 9 \cdot \sqrt{9} = 27$ . . . . **1 p**

b). Pentru a afla numărul numerelor iraţionale scădem din 2015 numărul de numere raţionale. Pentru ca $a_k \in Q$ trebuie să avem k pătrat perfect . . . . . . **1 p**

Cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 2015 este $1936 = 44^2$, deci $1^2 \cdot \sqrt{1^2}$, $2^2 \cdot \sqrt{2^2}$, $3^2 \cdot \sqrt{3^2}$, ..., $44^2 \cdot \sqrt{44^2}$ sunt numere raţionale, deci avem 44 numere raţionale . . . . **2 p**

Dacă sunt 44 numere raţionale, atunci $2015 - 44 = 1971$ sunt numere iraţionale . . **1 p**

Problema 3 $[AM$ bisectoarea $\angle DAB \Rightarrow \angle DAM \equiv \angle MAB$; dar $\angle MAB \equiv \angle AMD$ (alterne interne) $\Rightarrow \Delta ADM$ isoscel de bază $[AM] \Rightarrow AD = DM$; dar $AD = BC = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow$ M este mijlocul laturii $[DC]$ . . . . **1 p**

deoarece $[AM$ bisectoarea $\angle DAB$ şi $AN \perp AM \Rightarrow [AN$ bisectoarea $\angle EAB$, unde $A \in (DE) \Rightarrow \angle EAN \equiv \angle NAB$ . . . . **1 p**

din $\angle EAN \equiv \angle ANB$ (corespondente) $\Rightarrow \angle NAB \equiv \angle ANB \Rightarrow AB = BN$ . . **1 p**

În ΔNMC avem $PB \| MC \Rightarrow$(cf. T.F.A.) $\Delta NPB \sim \Delta NMC \Rightarrow \frac{PB}{MC} = \frac{NB}{NC}$ . . **1 p**

Cum $MC = \frac{AB}{2} = BC$ şi $NB = AB = 2 \cdot BC$ găsim

$NC = NB + BC = 2 \cdot BC + BC = 3 \cdot BC \Rightarrow \frac{PB}{BC} = \frac{2 \cdot BC}{3 \cdot BC} \Rightarrow PB = \frac{2 \cdot BC}{3}$ . . **1 p**

Deci $AP = AB - PB = 2 \cdot BC - \frac{2 \cdot BC}{3} = \frac{4 \cdot BC}{3}$ . . . . **1 p**

Adică $\frac{AP}{PB} = \frac{4 \cdot BC}{3} \cdot \frac{3}{2 \cdot BC} = 2$ . . . . **1 p**

Problema 4 Deoarece $\{O\} = BE \cap AD$ vom arăta că $O \in CF$ arătând că dreptele *AD, BE* şi *CF* sunt concurente folosind reciproca teoremei lui Ceva.

Arătăm că $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$.

Deoarece *F* este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow BF = FA \Rightarrow \frac{BF}{FA} = 1$ . . . . **1 p**

Cum $[BE$ este bisectoare $\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ . . . . **2 p**

Din ΔABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ şi $m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ **1 p**

Din ipoteză $BC = 3 \cdot BD \Rightarrow DC = BC - BD = 2 \cdot BD$ deci $\frac{CD}{DB} = 2$ . . . . **1 p**

Aşadar, $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, deci dreptele *AD, BE, CF* sunt concurente, şi deci punctele *C, O, F* coliniare . . . . **2 p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VIII-a

Subiectul 1 a) Amplifica in membrul stang cu($\sqrt{n+k}-\sqrt{n}$),simplifica prin k si obtine $\frac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+k}}$..................$2p$

Finalizare 1p

b) Se aplica rezultatul precedent, avand K=13 si se obtine:

$\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{27}}+..........\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+13}}=\frac{39}{40}$...........$2p$

$\Leftrightarrow\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{n+13}}=\frac{39}{40}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n+13}}=\frac{1}{40}$.................$1p$

Finalizare n=1587..............................1p

Subiectul II a) Rationalizeaza numitorul,obtine in paranteza patrata:

$2\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2015}$ ....$1p$

Scoate factor comun si obtine: $\left(10+4\sqrt{6}\right)^{2015}=2^{2015}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2015}$ 1p

Finalizeaza $\frac{2^{2016}\cdot1^{2015}}{2^{2016}}=1$ 1p

b) Obtine forma:(2a-b-3)+(a-2b+1) $\sqrt{3}$ =0...........................1p

Din(2a-b-3) $\in\mathbb{Q}$ si 0 $\in\mathbb{Q}\Rightarrow$(a-2b+1) $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

Din (a-2b+1) $\in\mathbb{Q}$ si (a-2b+1) $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow$a-2b+1=0 ....1p

Inlocuind in prima relatie $\Rightarrow$2a-b-3=0................................1p

Finalizare: a= $\frac{7}{3}$ $si\ b=\frac{5}{3}$ 1p

Subiectul III a) Justificare: d(M,AC)=ME,unde BE $\perp AC$ 1p

A $\left[ABC\right]=6\sqrt{2}(cm^2)\Rightarrow$BE= $2\sqrt{3}cm$, $ME=4$ cm 1p

b) Justificare; $d\left[B,\left(MAC\right)\right]=BQ, unde BQ\perp ME$ 1p

BQ= $\sqrt{3}cm$ 1p

c)Justifica: $pr_{(MAB)}\triangle MAC=\triangle MAF, CF\perp AB$ 1p

Calculeaza: cos u= $\frac{A_{[MAF]}}{A_{[MAC]}}=\frac{\sqrt{2}}{4}; u=m\sphericalangle\left[\left(MAC\right),\left(MAF\right)\right]$........................2p

Subiectul IV Aplica t.Ceva in $\triangle ACV$ si obtine: $\frac{VF}{FA}=\frac{VE}{EC}$......2p

Aplica R.T.THALES in ΔACV si obtine EF $\parallel$ AC........................1p

Analog demonstreaza ca ST $\parallel$ BD..3p

Finalizare $m\sphericalangle\left(EF,ST\right)=m\sphericalangle\left(AC,BD\right)=90^\circ$ 1p