SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a V-a

PROBLEMA 1

Fie numărul $A = 403 \cdot 5^{2015} - 2015$

a) Arătaţi că numărul A se divide cu 2015;

b) Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui $A + 2016$ prin 2015.

(Autor prof. Gornoavă Valeriu – Liceul cu Program Sportiv "Avram Iancu" Zalău)

Soluţie

a) $A = 403 \cdot 5^{2015} - 2015 \Leftrightarrow A = 403 \cdot 5 \cdot 5^{2014} - 2015 \Leftrightarrow$ ……………………………*1 punct*

$\Leftrightarrow A = 2015 \cdot \left(5^{2014} - 1\right) \Leftrightarrow A \vdots 2015.$ ………………………………………………*2 puncte*

b) $A + 2016 = 2015 \cdot 5^{2014} - 2015 + 2016 \Leftrightarrow A + 2016 = 2015 \cdot 5^{2014} + 1 \Leftrightarrow$ ……*2 puncte*

$\Rightarrow C = 5^{2014}, R = 1.$ ……………………………………………………………*2 puncte*

PROBLEMA 2

Se dau numerele $a = 2^{100} : \left[\left(7^{13} : 7^{12} - 5\right)^{97} + 2^{104} : \left(2^4 \cdot 8\right) + 4^{49}\right] \cdot 2^{108}$ şi $b = 3^{73} - \left(3^2 + 3^2 + 3^2\right)^{24}$.

a) Calculaţi *a* şi *b*.

b) Comparaţi *a* şi *b*. *(propusă din partea Şcolii Gimnaziale "Gyulaffy Laszlo" Cehu Silvaniei)*

Soluţie *a)* Determinarea valorii $a = 2^{109}$ ………………………………………………*2 puncte*

Determinarea valorii $b = 2 \cdot 3^{72}$ ………………………………………………*2 puncte*

b) $a = 2^{109} = 2 \cdot \left(2^3\right)^{36} = 2 \cdot 8^{36}$ ………………………………………………………*1 punct*

$b = 2 \cdot 3^{72} = 2 \cdot \left(3^2\right)^{36} = 2 \cdot 9^{36}$ ………………………………………………………*1 punct*

Finalizare $a < b$ ……………………………………………………………… *1 punct*

PROBLEMA 3

Doi colegi citesc două cărti având acelaşi număr de pagini. În prima zi unul citeşte a cincea parte din cartea sa, iar celălalt a saptea parte, constatând ca a citit cu 16 pagini mai puţin decât primul. Câte pagini mai au de citit fiecare?

(propusă din partea Liceul Tehnologic "Liviu Rebreanu" Hida)

Soluţie

Notăm a 5-a parte dintr-o carte cu x şi a 7-a parte cu y……………………………*1 punct*

Deci $x = 16 + y$………………………………………………………*1 punct*

$5 \cdot x = 7 \cdot y$………………………………………………………*1 punct*

Ne rezultă $5 \cdot (16 + y) = 7 \cdot y$, deci $80 + 5 \cdot y = 7 \cdot y$, rezultă $y = 40$ şi $x = 56$..*2 puncte*

Cărţile au fiecare $56 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280$ pagini……………………………………*1 punct*

Elevii mai au de citit 224 respectiv 240 pagini……………………………………*1 punct*

PROBLEMA 4

Numărul 65 are proprietatea că se poate reprezenta în cel puţin două feluri ca sumă de două patrate perfecte $65 = 49 + 16 = 64 + 1$. Arătaţi că numărul 25^{2015} are aceeaşi proprietate.

(Gazeta Matematică)

Soluţie

$25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$ …………………………………………………… *1 punct*

deci $25^{2015} = 25^{2014} \cdot 25 = \left(3^2 + 4^2\right) \cdot \left(25^{1007}\right)^2 =$ …………………………… *1 punct*

$= \left(3 \cdot 25^{1007}\right)^2 + \left(4 \cdot 25^{1007}\right)^2$ …………………………… *1 punct*

$25^3 = 15625 = 5625 + 10000 = 75^2 + 100^2$ …………………………………… *2 puncte*

deci $25^{2015} = 25^{2012} \cdot 25^3 = \left(75^2 + 100^2\right) \cdot \left(25^{1006}\right)^2 =$ …………………………… *1 punct*

$= \left(75 \cdot 25^{1006}\right)^2 + \left(100 \cdot 25^{1006}\right)^2$ …………………………… *1 punct*

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ **Etapa locală – 14 februarie 2015**

Barem Clasa a VI-a

PROBLEMA 1

Fie a,b şi c trei numere naturale prime şi distincte, astfel ca $4a+6b+9c=105$.

a) Determinaţi valorile numerelor a,b şi c.

b) Dacă n este un număr natural impar, atunci arătaţi că numărul $2^{n+c}-2^{n+b}+2^{n+a}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, unde a,b şi c sunt numerele determinate la punctul a).

Soluţie *(autor prof. Breda Francisc – Liceul de Artă „Ioan Sima" Zalău)*

a) $a\vdots 3\Rightarrow a=3$ ...1 punct

$2b+3c=31\Rightarrow 3c\le 31\Rightarrow c\in\{2,3,5,7\}$ ...1 punct

c $impar, c\ne a\Rightarrow c\in\{5,7\}$ ...1 punct

$c=5\Rightarrow b=8$ compus

$c=7\Rightarrow b=5$ ...1 punct

b) $n=2k+1\Rightarrow 2^{n+c}-2^{n+b}+2^{n+a}=2^{2k+8}-2^{2k+6}+2^{2k+4}$ ...1 punct

$=2^{2k+4}\left(2^4-2^2+1\right)=\left(2^{k+2}\right)^2\cdot 13=\left(2^{k+2}\right)^2\cdot\left(2^2+3^2\right)=$ ...1 punct

$=\left(2^{k+3}\right)^2+\left(2^{k+2}\cdot 3\right)^2$ ...1 punct

PROBLEMA 2

Se consideră numerele: $A=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2016}$; $B=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...+\frac{2015}{2016}$

a) Să se aratecă $A+B$ este un număr natural.

b) Să se arate că $\frac{2013}{2}<B-A<2013$. *(G.M. 12/2014-supliment cu exerciţii)*

Soluţie

a) A+B= $(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})$ +.......$(\frac{1}{2016}+\frac{2015}{2016})$..........2 puncte

A+B = 1+1+.......+1 (de 2013 ori) ...1 punct

Finalizare ...1 punct

b) $\frac{2013}{2}<(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})+(\frac{4}{5}-\frac{1}{5})+...+(\frac{2015}{2016}-\frac{1}{2016})$...2 puncte

Finalizare...1 punct

PROBLEMA 3

Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A,B,C,D,M în această ordine astfel încât B este mijlocul segmentului $[AC]$, $[MD]\equiv[DC]\equiv[AC]$ şi $BD=6cm$.

a) Calculaţi distanţa de la A la D.

b) Aflaţi lungimea segmentului $[AM]$ *(propusă de Şcoala Gimnazială "Simion Bărnuţiu" Zalău)*

Soluţie

a) Din B mijlocul lui (AC) rezultă AB = BC...1 punct

MD = DC = CA = 2BC ...1 punct

BD = BC + CD = BC + 2BC = 3BC, deci BC = 2 cm...2 puncte

AD = AC + CD = 4AB =8 cm ...1 punct

b) AM = 3AC = 3·2BC = 12cm ...2 puncte

PROBLEMA 4

În jurul unui punct sunt patru unghiuri consecutive AOB,BOC,COD,DOA astfel încât al doilea este dublul primului şi încă $20°$, al treilea este cu $10°$ mai puţin decât întreitul primului, iar al patrulea este de patru ori mai mare decât primul şi încă $30°$. Câte grade are fiecare unghi?

Soluţie *(Gazeta Matematică)*

Notăm măsurile unghiurilor cu $\hat{O}_1,\hat{O}_2,\hat{O}_3,\hat{O}_4$

Atunci: $\hat{O}_2=2\hat{O}_1+20^0$; $\hat{O}_3=3\hat{O}_1-10^0$; $\hat{O}_4=4\hat{O}_1+30^0$ ...1 punct

Cu aceste notaţii avem: $170=5\hat{O}_1+10$...2 puncte

$\hat{O}_1=32^0$ ...1 punct

$\hat{O}_2=64^0+20^0=84^0$; $\hat{O}_3=94^0-10^0=84^0$; $\hat{O}_4=128^0+30^0=158^0$ ...2 puncte

Măsurile unghiurilor sunt:32°, 84°, 86°, 158°...1 punct filiala SĂLAJ **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** **Etapa locală – 14 februarie 2015**

Barem clasa a VII-a

PROBLEMA 1

a) Calculaţi: $E=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3a-2}-\frac{1}{3a+1}\right)$, $a\in N^*$.

b) Dacă $S=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n\in N^*$, arătaţi că $S<\frac{1}{3}$.

(selectată de prof. Chiş Maria – Şcoala Gimnazială "Corneliu Coposu" Zalău)

Soluţie

a) $E=\frac{1}{(3a-2)(3a+1)}$ ……...3p

b) Folosind a) obţinem:

$S=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{n}{3n+1}<$…………..3p

$<\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$…………………………………………………………………1p

PROBLEMA 2

a) Arătaţi că numărul $x=\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}}+\sqrt{\frac{55}{0,0(02)}}+\sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este număr natural şi determinaţi valoarea acestuia. (***)

b) Demonstraţi că numărul $m=\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2012+2013}$ este un număr iraţional.

(Gazeta Matematică, 10/2013)

Soluţie

a) Transformările: $0,0(2)=\frac{1}{45},0,0(02)=\frac{1}{495},0,0(002)=\frac{1}{4995}$ .... *1 punct*

Înlocuind sub radical se obţine: $x=\sqrt{5\cdot45}+\sqrt{55\cdot495}+\sqrt{555\cdot4995}$ …………………….. *1 punct*

Efectuând calculele sau descompunând factorii de sub radicali se obţine:

$x=\sqrt{3^2\cdot5^2}+\sqrt{3^2\cdot5^2\cdot11^2}+\sqrt{3^2\cdot5^2\cdot37^2}\Leftrightarrow x=15+165+1665\quad\Leftrightarrow x=1845$ ...*2 puncte*

b) Deoarece produsul $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2012$ se termină în 0 ....*1 punct*

suma $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2012+2013$ se termină cu 3 ....*1 punct*

Cum nici un pătrat perfect nu se termină cu 3, rezultă că numărul m este număr iraţional …*1 punct*

PROBLEMA 3

Se consideră numerele raţionale nenule a,b,c,d. Arătaţi că $a\cdot b\cdot c\cdot d<0$, ştiind că $\frac{1}{a+b+c+d}=\frac{2}{b+c+d}=\frac{3}{c+d+a}=\frac{4}{d+a+b}$.

(Gazeta Matematică, 9/2014)

Soluţie

Prin inversare avem: $\frac{a+b+c+d}{1}=\frac{b+c+d}{2}=\frac{c+d+a}{3}=\frac{d+a+b}{4}=k$ ……………..….*1 punct*

Rezultă $(1)a+b+c+d=k$, $(2)b+c+d=2k$, $(3)c+d+a=3k$ și $(4)d+a+b=4k$ .....*2 puncte*

Scăzând relaţiile (1) şi (2) obţinem $a=-k$..*1 punct*

Scăzând relaţiile (1) şi (3) obţinem $b=-2k$ ....*1 punct*

Scăzând relaţiile (1) şi (4) obţinem $c=-3k$, iar prin înlocuirea în (1) obţinem $d=7k$ ..*1 punct*

Deci $abcd=-42k^4$ evident negativ.......……………………………………………………......*1 punct*

PROBLEMA 4

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul E. Arătaţi că, dacă triunghiul CED este echilateral, atunci triunghiul AEB este isoscel, cu măsura unghiului AEB de $150°$.

Soluţie *(selectată de prof. Gornoavă Valeriu – Liceul cu Program Sportiv "Avram Iancu" Zalău)*

Triunghiul CED echilateral atunci $CE=DC=DE$ şi măsurile unghiurilor EDC, DEC şi ECD sunt de câte $60°$, iar $ABCD$ pătrat, atunci $CD=AD=BC$, iar măsurile unghiurilor ADC şi BCD sunt de câte $90°$ ………………….………………………………………………….. *1 punct*

Atunci măsurile unghiurilor ADE şi BCE sunt de câte $30°$.………………………*1 punct*

Triunghiurile DAE şi BCE sunt congruente ($L.U.L.$) rezultă că laturile AE şi BE sunt congruente, deci triunghiul AEB este isoscel cu baza AB ……………………………...…*3 puncte*

Deoarece $AD=DE$ triunghiul ADE este isoscel cu baza AE, rezultă că măsura unghiului DAE este de $75°$, iar măsura unghiului EAB este de $15°$ …………………………….…*1 punct*

Triunghiul AEB isoscel cu baza AB atunci măsura unghiului AEB este de $150°$ ………*1 punct* filiala SĂLAJ **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** **Etapa locală – 14 februarie 2015**

Barem clasa a VIII-a

PROBLEMA 1

a) Dacă $a \in [-2,3]$ şi $a+2=5b$, atunci expresia $E=\sqrt{a^2+2b^2+4a+4}+\sqrt{a^2+2b^2-6a-4b+11}$ are valoare constantă.

(selectată de prof. Mureşan Marius şi Csatlos Mihai – Liceul Tehnologic „Octavian Goga" Jibou)

b) Fie $x, y \in Z$ astfel încât $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0$ şi $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0$. Aflaţi $|x-y|^{2015}$

(autor prof. Vlaicu Daniela – Şcoala Gimnazială „Gheorghe Lazăr" Zalău)

Soluţie

a) Scrie $E=\sqrt{a^2+4a+4+2b^2}+\sqrt{a^2-6a+9+2b^2-4b+2}$

apoi $E=\sqrt{(a+2)^2+2b^2}+\sqrt{(a-3)^2+2(b-1)^2}$ ....*1 punct*

înlocuind $a+2=5b$ se obţine $E=\sqrt{27b^2}+\sqrt{27(b-1)^2}=\sqrt{27}\left(|b|+|b-1|\right)$ ....*1 punct*

$-2 \le a \le 3 / +2 \Leftrightarrow 0 \le a+2 \le 5 / :5 \Leftrightarrow 0 \le \frac{a+2}{5} \le 1 \Rightarrow 0 \le b \le 1 \Rightarrow |b|=b$

Finalizare: *din* $0 \le b \le 1 / -1 \Rightarrow -1 \le b-1 \le 0 \Rightarrow |b-1|=1-b$ .... *1 punct*

Atunci $E=\sqrt{27}\,(b+1-b)=3\sqrt{3}=const$

b) Din $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0 \Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}<0 \\ x-\sqrt{5}>0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x-\sqrt{2}>0 \\ x-\sqrt{5}<0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$ Cum $x \in Z \Rightarrow x=2$ ………………… *1,5 puncte*

Din $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0 \Rightarrow \begin{cases} y-\sqrt{5}<0 \\ y-\sqrt{10}>0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y-\sqrt{5}>0 \\ y-\sqrt{10}<0 \end{cases} \Rightarrow y \in \left(\sqrt{5},\sqrt{10}\right)$ Cum $y \in Z \Rightarrow y=3$

………………… *1,5 puncte* Deci $|x-y|^{2015}=1$ ………………… *1 punct*

PROBLEMA 2

a) Stabiliţi valoarea numerelor reale $x, y, z \in R$, care satisfac relaţia:
$x^2+y^2+z^2=4x-6y+10z-38$

b) Numerele reale nenule a şi b verifică egalitatea $a^2b^{-2}-3a^{-2}b^2=2$. Să se arate că a şi b nu pot fi simultan numere raţionale. *(Gazeta Matematică)*

Soluţie

a) $\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+6y+9\right)+\left(z^2-10z+25\right)=0$ deci $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=0$... *1 punct*

Finalizare: $x=2, y=-3, z=5$ ……………………………………………….*1 punct*

b) $\frac{a^2}{b^2}-3\frac{b^2}{a^2}=2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2}-4\frac{b^2}{a^2}=0$ ……………………………………………*1 punct*

$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2-\left(2\frac{b}{a}\right)^2=0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2\frac{b}{a}\right)=0$ …………………..*1 punct*

$\left(\frac{a}{b}-3\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$ ……………………………………………………….*1 punct*

Cazul I: $\frac{a}{b}=3\frac{b}{a} \Rightarrow a=\pm b\sqrt{3}$ şi Cazul II: $\frac{a}{b}=-\frac{b}{a} \Rightarrow a^2=-b^2$, imposibil.............*1 punct*

Deci $a=\pm b\sqrt{3}$ de unde a şi b nu pot fi simultan numere raţionale.......................*1punct*

PROBLEMA 3

Arătaţi că dacă $a^2+b^2+c^2<1$, atunci $ab+bc+ca \in \left(-\frac{1}{2},1\right)$

Selectată de prof. Szabo Otilia – Şcoala Gimnazială „Andrei Mureşanu" Cehu Silvaniei)

Soluţie

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ ....*2 puncte*

$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ si $a^2 + b^2 + c^2 < 1 \Rightarrow ab + bc + ca > -\frac{1}{2}$ ....*2 puncte*

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$ .... *2 puncte*

Finalizare $ab + bc + ca < 1$ ....*1 punct*

PROBLEMA 4

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 12$ cm, $AA' = 18$ cm se consideră pe muchia $[A'B']$ punctul N, astfel încât $A'N = 3 \cdot B'N$ şi $P \in (AA')$. Determinaţi lungimea AP astfel încât pentru orice $M \in [BC]$ triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

(Gazeta Matematică)

Soluţie

$BC \perp (ABB'), PN \subset (ABB') \Rightarrow PN \perp BC, PN \perp BN$
$\Rightarrow PN \perp (BMN) \Rightarrow PN \perp BN$ ....*2 puncte*

$NA' = 9\sqrt{3}, NB' = 3\sqrt{3}$ ....*1 punct*

Notând $A'P = x \Rightarrow PN^2 = x^2 + 243$ ....*1 punct*

$BN^2 = 324 + 27 = 351$ ....*1 punct*

$PB^2 = (18 - x)^2 + (12\sqrt{3})^2 = 324 - 36x + x^2 + 432 = 756 - 36x + x^2$ ....*1 punct*

Triunghiul MNP este dreptunghic în $N \Rightarrow 756 - 36x + x^2 = x^2 + 243 + 351$

$\Rightarrow x = 4,5cm$ .... *1 punct*