INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a V-a

1. Într-un depozit se află 151 pachete a câte 3 kg fiecare şi 10 pachete a câte 4 kg fiecare.

(2p) a) Cât cântăresc în total pachetele aflate în depozit?

(5p) b) Pot fi aşezate aceste pachete pe 10 rafturi ce permit fiecare o încărcătură maximă de 50 kg? Justificaţi răspunsul.

Felicia Brodeţchi

2. (7p) Determinați numerele naturale a și b, știind că suma $a+b$ este minimă și $(a-2)\cdot(b-4)=72$.

Liviu Cocariu-Ardelean

3. Se consideră numărul: $A=\left\{\left[\left(3^{n+2}+3^{n+3}-4\cdot 3^{n+1}\right):\left(2\cdot 3^{n+3}-5\cdot 3^{n+2}-3^{n}\right)\right]^{2}\right\}^{10^{2}}\cdot\left(9^{638}\right)^{3}$.

(3p) a) Arătați că $A=9^{2014}$.

(4p) b) Scrieți numărul A ca sumă de două cuburi perfecte.

Diana Făgețan

4. (7p) Scrieți numărul 38^{n} ca o sumă de trei pătrate perfecte, oricare ar fi n număr natural.

GM 6-7-8/2014

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a VI-a

1. (7p) Cei n elevi ai unei școli, $750 < n < 820$, se află pe terenul de sport. Dacă elevii se încolonează câte 13, atunci rămân 10 elevi neîncolonați, dacă elevii se încolonează câte 6, atunci rămân neîncolonați 2 elevi. Determinați numărul n.

GM 6-7-8/2014

2. (3p) a) Determinați cifrele nenule a și b, prime între ele, pentru care $\overline{a,(ba)} + \overline{b,(ab)} \in \mathbb{N}$.

Monica Guita

(4p) b) Demonstraţi că $\frac{1}{2015} + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2015^3} + ... + \frac{1}{2015^{2015}} < \frac{1}{2014}$.

Adina Oancea

3. (7p) Pe dreapta AB se consideră punctele distincte M_1, M_2, M_3, ... , M_n, în această ordine, astfel încât $M_1B = 3\ AB$, $M_2B = 3M_1B$, ... , $M_nB = 3M_{n-1}B$. Dacă $AB = 18$, aflați numărul natural n, astfel încât $M_1B + M_2B + ... + M_nB = 531414$.

Monica Guita

4. Se consideră patru unghiuri în jurul punctului O: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$, astfel încât m($\sphericalangle AOB$) = 134°, m($\sphericalangle COD$) = 114°. [OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ și [ON este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$.

(4p) a) Calculați măsura $\sphericalangle MON$.

(3p) b) Dacă bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AON$ și $\sphericalangle BOC$ sunt semidrepte opuse, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$.

Daniela Cismaș

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a VII-a

1. (3p) a) Comparaţi numerele: $A=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+...+\frac{2}{2013\cdot 2015}$ şi

$$B=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+...+\frac{3}{2014\cdot 2017}.$$

(4p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}+...+\frac{x+2015}{2017}=2015.$$

Delia Şerb

2. (7p) Demonstraţi că într-un trapez isoscel înălţimea este egală cu linia mijlocie dacă şi numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

***

3. (3p) a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem

$$|a+b|+|a+c|\geq|b-c|.$$

(4p) b) Demonstraţi că pentru orice număr real x avem

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+...+|x+2014|\geq 1007^2.$$

G*M11/2014*

4. (7p) În triunghiul *ABC*, având $m(\hat{A})=90^0$, *AD* este înălţime, unde $D\in BC$. Bisectoarea unghiului *B* intersectează segmentele *(AD)* şi *(AC)* în punctele *E*, respectiv *F*. Știind că $m(A\hat{E}F)=60^0$, determinaţi raportul ariilor triunghiurilor *FED* şi *ABC*.

Dan Vulc

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a VIII-a

1.(7p) Ordonaţi crescător numerele: $\left(\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\right)^{-1}$; 1; $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2bc}}$; $\frac{(b+c)^2}{4bc}$, unde $b, c > 0$.

Petru Vlad

2. (3p) a) Descompuneţi în factori numărul $4n^4+1$, $n \in N^*$.

(4p) b) Determinaţi partea întreagă a numărului $A = \frac{4}{5} + \frac{8}{65} + \frac{12}{325} + ... + \frac{4n}{4n^4+1}$, $n \in N^*$.

GM 10/2014

3. Pe planul trapezului isoscel $ABCD$, $AB \| CD$, $AB = 10, CD = 6$, având diagonalele perpendiculare, se ridică perpendiculara $MP = 2\sqrt{2}$, unde *M* este mijlocul laturii *(BC)*. Calculaţi:

(3p) a) aria trapezului *ABCD*.

(4p) b) distanţa *PD*.

Gheorghe Floarea

4. Se consideră o piramidă patrulateră regulată *VABCD* cu latura bazei $AB = 6$ şi muchia laterală $VA = 12$. Se construiesc bisectoarele $[BM$ a unghiului *VBC*, $M \in (VC)$ şi $[BN$ a unghiului *VBA*, $N \in (VA)$. Determinaţi:

(3p) a) lungimea segmentului *MN*.

(4p) b) sinusul unghiului *BVD*.

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a V-a

1. a) $151 \cdot 3$ kg + $10 \cdot 4$ kg = 493 kg ....**(2p)**
b) 151 pachete + 10 pachete = 161 pachete în total ....**(1p)**
161:10 = 16 rest 1 $\Rightarrow$ cel puțin un raft are 17 pachete (cf. principiului lui Dirichlet) ....**(2p)**
$17 \cdot 3$ kg = 51 kg > 50 kg $\Rightarrow$ **nu** pot fi așezate pachetele cf. restricției ....**(2p)**

2. $(a-2)\cdot(b-4)=72$, $a,\ b\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow a-2\,|\,72$ și $b-4\,|\,72$ ....**(2p)**

$D_{72}=\{1,\ 2,\ 3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$ ....**(1p)**

$a-2$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
$b-4$	72	36	24	18	12	9	8	6	4	3	2	1
a	3	4	5	6	8	10	11	14	20	26	38	74
b	76	40	28	22	16	13	12	10	8	7	6	5
$a+b$	79	44	33	28	24	23	23	24	28	33	44	79

....**(3p)**
Din tabel rezultă 2 soluții $a=10,\ b=13$ și $a=11,\ b=12$ ....**(1p)**

3. a) $A=\left\{\left[\left(3^n\cdot\left(3^2+3^3-4\cdot3\right)\right):\left(3^n\cdot\left(2\cdot3^3-5\cdot3^2-1\right)\right)\right]^2\right\}^{100}\cdot9^{1914}$ ....**(1p)**

$A=\left\{\left[\left(3^n\cdot24\right):\left(3^n\cdot8\right)\right]^2\right\}^{100}\cdot9^{1914}$ ....**(1p)**

$A=\left(3^2\right)^{100}\cdot9^{1914}=9^{100}\cdot9^{1914}=9^{2014}$ ....**(1p)**

b) $A=9^{2014}=9\cdot9^{2013}=(8+1)\cdot9^{2013}=\left(2^3+1\right)\cdot9^{2013}$ ....**(2p)**

$A=2^3\cdot9^{2013}+9^{2013}=2^3\cdot9^{3\cdot671}+9^{3\cdot671}$ ....**(1p)**

$A=\left(2\cdot9^{671}\right)^3+\left(9^{671}\right)^3$ ....**(1p)**

4. $38=1^2+1^2+6^2$ sau $38=2^2+3^2+5^2$ ....**(1p)**
$38^2=2^2+12^2+36^2$ ....**(2p)**
n impar, $38^{2k+1}=38^{2k}\cdot38=38^{2k}(2^2+3^2+5^2)=(2\cdot38^k)^2+(3\cdot38^k)^2+(5\cdot38^k)^2$ ....**(2p)**
n par, $38^{2k+2}=38^{2k}\cdot38^2=38^{2k}(2^2+12^2+36^2)=(2\cdot38^k)^2+(12\cdot38^k)^2+(36\cdot38^k)^2$ ....**(2p)**

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a VI-a

1. $\begin{cases} n = 13c_1 + 10 \\ n = 6c_2 + 2 \end{cases}$ .... **(1p)**

$M_{13} - 10 \in \{3, 16, 29, ..., 68, 81, 94, ...\}$ .... **(1p)**

$M_6 - 2 \in \{4, 10, 16, ..., 82, 88, 94, ...\}$ .... **(1p)**

$\begin{cases} n + 94 = 13(c_1 + 8) \\ n + 94 = 6(c_2 + 16) \end{cases} \Rightarrow n + 94 = 78k$ .... **(2p)**

$k = 11 \Rightarrow n + 94 = 858 \Rightarrow n = 764$ .... **(2p)**

2. a) $\overline{a,(ba)} + \overline{b,(ab)} = \dfrac{\overline{aba} - a + \overline{bab} - b}{99} = \dfrac{110(a+b)}{99} = \dfrac{10(a+b)}{9}$ .... **(1p)**

$\dfrac{10(a+b)}{9} \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \{9, 18\}$ .... **(1p)**

a, *b* cifre prime între ele $\Rightarrow (a, b) \in \{(1,8), (8,1), (2,7), (7,2), (4,5), (5,4)\}$ .... **(1p)**

b) Notând suma cu *S* avem $2015S = 1 + \dfrac{1}{2015} + \dfrac{1}{2015^2} + \dfrac{1}{2015^3} + ... + \dfrac{1}{2015^{2014}}$ .... **(1p)**

$2015S - S = 1 - \dfrac{1}{2015^{2015}} < 1$ .... **(2p)**

$S < \dfrac{1}{2014}$ .... **(1p)**

3. $M_1B + M_2B + \ldots + M_nB = 3AB + 3^2 AB + ... + 3^n AB$ .... **(1p)**

$AB(3 + 3^2 + ... + 3^n) = 531414$ .... **(1p)**

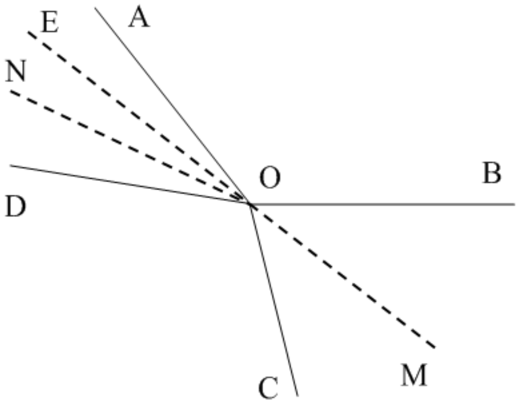
$3 + 3^2 + ... + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$ .... **(1p)**

$\dfrac{3^{n+1} - 3}{2} \cdot 18 = 531414$ .... **(1p)**

$3^{n+1} = 3^{10}$ .... **(2p)**

$n = 9$ .... **(1p)**

4. a) Figura.. **(1p)**



m($\sphericalangle AOD$) + m($\sphericalangle BOC$) = $112^\circ \Rightarrow$

m($\sphericalangle NOD$) + m($\sphericalangle MOC$) = $56^\circ \Rightarrow$

m($\sphericalangle NOM$) = m($\sphericalangle NOD$) + m($\sphericalangle DOC$) + m($\sphericalangle COM$)=
= $56^\circ + 114^\circ = 170^\circ$ .... **(3p)**

b) m($\sphericalangle EON$) = m($\sphericalangle EOM$) – m($\sphericalangle NOM$) =
= $180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$ .... **(1p)**

m($\sphericalangle AOD$) = 4 m($\sphericalangle EON$) = 40° .... **(1p)**

m($\sphericalangle BOC$) = 112° – m($\sphericalangle AOD$) = 72° .... **(1p)**

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a VII-a

1. a) $A=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}$ ....**(1p)**

$B=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2017}=1-\frac{1}{2017}$ ....**(1p)**

$\frac{1}{2015}>\frac{1}{2017}\Rightarrow A<B$ ....**(1p)**

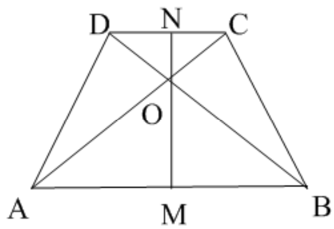
b) Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x+1}{3}-1+\frac{x+2}{4}-1+\frac{x+3}{5}-1+...+\frac{x+2015}{2017}-1=0$ ....**(1p)**

$\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{4}+\frac{x-2}{5}+...+\frac{x-2}{2017}=0$ ....**(1p)**

$(x-2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2017}\right)=0$ ....**(1p)**

Deoarece $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2017}\neq 0$, obţinem $x-2=0$, adică $S=\{2\}$ ....**(1p)**

2. *ABCD* trapez isoscel, *AB*||*CD*, *AB*>*CD*, $AC\cap BD=\{O\}$, *M* şi *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *DC*, $OM=x$ şi $ON=y$. *MN* este axa de simetrie a trapezului, deci punctele *M*, *O* şi *N* sunt coliniare ....**(1p)**



$(\rightarrow)$ Dacă $BD\perp AC$, atunci $AB=2x$ şi $DC=2y$, conform teoremei medianei aplicate în triunghiurile dreptunghice *AOB* şi *COD* ....**(1p)**

$MN=x+y\Rightarrow MN=\frac{AB+DC}{2}$ ....**(1p)**

$(\leftarrow)$ Dacă $MN=\frac{AB+DC}{2}\Rightarrow x+y=\frac{AB+DC}{2}$, folosind faptul că $\Delta AOB\sim\Delta COD$, se obţine $\frac{x}{y}=\frac{AB}{DC}$ ....**(2p)**

$\frac{x+y}{y}=\frac{AB+DC}{DC}\Rightarrow y=\frac{DC}{2}$ ....**(1p)**

Folosind reciproca teoremei medianei, se obţine că triunghiul *DOC* este dreptunghic în *O*, deci diagonalele trapezului sunt perpendiculare ....**(1p)**

3. a) $|a+b|+|a+c|=|a+b|+|-a-c|\geq$ ....**(1p)**

$\geq|a+b-a-c|=|b-c|$, pentru oricare două numere reale *a* şi *b* ....**(2p)**

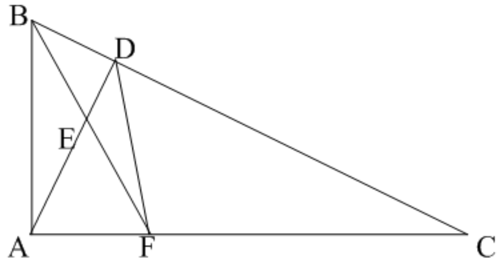
b) Notând suma cu S avem $S = |x+2014| + |x+1| + |x+2013| + |x+2| + ... + |x+1008| + |x+1009|$ ....**(1p)**

Aplicând punctul a) pentru fiecare doi termeni consecutivi se obţine

$S \geq 2013 + 2011 + 2009 + ... + 3 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 2014 \cdot 1007 = 1007^2$ ....**(3p)**

4. $m(A\hat{E}F) = m(B\hat{E}D) = 60^0 \Rightarrow m(E\hat{B}C) = m(A\hat{B}E) = m(\hat{C}) = 30^0$ ....**(1p)**

ΔAEF este echilateral şi ΔAEB este isoscel ....**(1p)**



Aplicând succesiv teorema unghiului de 30^0 în triunghiurile ABC și BED, avem:

$AB = x$, $BC = 2x$, $ED = y$, $BE = 2y$ ....**(1p)**

$\frac{A_{\Delta FED}}{A_{\Delta FAE}} = \frac{ED}{AE} = \frac{ED}{BE} = \frac{1}{2}$ (1) ....**(1p)**

$\frac{A_{\Delta FAE}}{A_{\Delta FAB}} = \frac{1}{2}$ (2), conform teoremei medianei în triunghiul dreptunghic ABF ....**(1p)**

$\frac{A_{\Delta FAB}}{A_{\Delta FBC}} = \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, conform teoremei bisectoarei în triunghiul ABC, de unde

$\frac{A_{\Delta FAB}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3}$ (3) ....**(1p)**

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem $\frac{A_{\Delta FED}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ....**(1p)**

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a VIII-a

1. $b+c\geq 2\sqrt{bc}\Rightarrow \dfrac{b+c}{2\sqrt{bc}}\geq 1\Rightarrow \left(\dfrac{b+c}{2\sqrt{bc}}\right)^{-1}\leq 1$ ……………………………………………**(2p)**

$\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2bc}}\geq 1\Leftrightarrow (b-c)^2\geq 0$ ……………………………………………**(1p)**

$\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2bc}}\leq \dfrac{(b+c)^2}{4bc}\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2}{2bc}\leq \dfrac{(b+c)^2}{16b^2c^2}$ ……………………………………………**(2p)**

$8bc\left(b^2+c^2\right)\leq (b+c)^4\Leftrightarrow (b-c)^4\geq 0$ ……………………………………………**(1p)**

Ordonarea este cea din enunţ ……………………………………………**(1p)**

2. a) $4n^4+1=4n^4+4n^2+1-4n^2$ ……………………………………………**(1p)**

$\left(2n^2+1\right)^2-4n^2=\left(2n^2-2n+1\right)\left(2n^2+2n+1\right)$ ……………………………………………**(2p)**

b) $\dfrac{4n}{4n^4+1}=\dfrac{1}{2n^2-2n+1}-\dfrac{1}{2n^2+2n+1}$ ……………………………………………**(1p)**

$A=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{13}...+\dfrac{1}{2n^2-2n+1}-\dfrac{1}{2n^2+2n+1}$ ……………………………………………**(1p)**

$A=1-\dfrac{1}{2n^2+2n+1}$ ……………………………………………**(1p)**

$[A]=0$ ……………………………………………**(1p)**

3. a) $AC\cap BD=\{O\},OD=OC\Rightarrow d(O,DC)=3$ ……………………………………………**(1p)**

$d(O,AB)=5$ ……………………………………………**(1p)**

$h_{trapez}=8,A_{trapez}=64$ ……………………………………………**(1p)**

b) $MT\perp DC,MT=4,DT=7$ ……………………………………………**(2p)**

$DM=\sqrt{65}$ ……………………………………………**(1p)**

$PD=\sqrt{73}$ ……………………………………………**(1p)**

4. a) Din teorema bisectoarei $\Rightarrow MN \parallel AC$ ……………………………………………**(1p)**

$\dfrac{VM}{MC}=\dfrac{12}{6}=\dfrac{2}{1}$ ……………………………………………**(1p)**

$\dfrac{VM}{VC}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{MN}{AC}\Rightarrow MN=4\sqrt{2}$ ……………………………………………**(1p)**

b) Se calculează $VO=3\sqrt{14}$ ……………………………………………**(1p)**

$A_{\Delta VBD}=\dfrac{VO\cdot BD}{2}=\dfrac{DV\cdot VB\cdot \sin V}{2}$ ……………………………………………**(2p)**

$\sin V=\dfrac{3\sqrt{14}\cdot 6\sqrt{2}}{144}\Rightarrow \sin V=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ……………………………………………**(1p)**