TELEORMAN **Olimpiada de matematică**

Etapa locală, 28.02.2015

Clasa aV-a

1. Fie numărul $A = 2^{2020} \cdot 5^{2015} + 2^{2017} \cdot 5^{2016} - 2^{2016} \cdot 5^{2017}$.
   a) Arătați că numărul A nu este pătrat perfect.
   b) Determinați numărul cifrelor lui A, scris în baza zece.

2. Fie A o mulțime formată din 10 numere naturale. Adunând resturile împărțirii tuturor numerelor din mulțimea A la 4 se obține 29.
   a) Câte numere pare și câte numere impare conține mulțimea A ?
   b) Dacă suma numerelor impare din A se împarte la 4, determinați restul împărțirii.

3. a) Arătați că $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$.
   b) Demonstrați că numărul 2015 nu poate fi scris sub forma $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$, unde n este un număr natural.
   c) Fie $a = (2^0 + 2^1) + (2^0 + 2^1 + 2^2) + \ldots + (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2015})$. Arătați că numărul $b = a + 2015$ este divizibil cu 4.

4. Să se arate că numărul $n = 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + \underbrace{100 \ldots 01}_{101\, cifre}$ este divizibil cu 10, dar nu este divizibil cu 100.

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, scrise în baza zece, astfel încât $x > y$ și $xy = 2015$. Să se arate că :
   a) Numărul $z = 31^x \cdot 13^y + 403$ este divizibil cu 2015.
   b) Fracția $\frac{2^x + 2^y}{3^x + 3^y}$ este reductibilă.

2. Fie n un număr natural astfel încât numerele $n, n + 2$ și $n + 4$ să fie prime. Să se determine cel mai mic număr natural care, împărțit la n dă restul 1, împărțit la $n + 2$ dă restul 2 și împărțit la $n + 4$ dă restul 6.

3. Să se arate că nu există cifrele $a, b, c, a \neq 0$, astfel încât să se verifice egalitatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{abc}$, numerele fiind scrise în baza 10.

4. Fie O, A, B, C puncte coliniare astfel încât $A \in (OB)$, $B \in (AC)$ și D mijlocul lui (AB), E mijlocul lui (BC), F mijlocul lui (AC). Să se arate că
$$OA + OB + OC = OD + OE + OF.$$

Barem clasa a V-a

1. a) $A = 2^{2016} \cdot 5^{2015}(2^4 + 2 \cdot 5 - 5^2) = 2^{2016} \cdot 5^{2015} = (2^{1008})^2 \cdot (5^{1007})^2 \cdot 5$, care nu este pătrat perfect………………………………………………………………………………… $4p$

b) $A = 2^{2016} \cdot 5^{2015} = 2 \cdot 10^{2015} = 2\underbrace{00\ldots0}_{2015}$, deci A are 2016 cifre……………………… $3p$

2 a) Deoarece cele 10 resturi sunt mai mici sau egale cu 3 și suma lor este $29 = 3 \cdot 10 - 1$, va rezulta că nouă dintre resturi sunt 3, iar unul este 2 (dacă ar exista cel mult opt resturi egale cu 3, suma lor ar fi mai mică sau egală cu 24, deci ar rămâne două resturi mai mici sau egale cu 2 care au suma mai mare sau egală cu 5,ceea ce nu este posibil). Deci nouă numere sunt impare (de forma $4k + 3, k \in \mathbb{N}$), iar unul par, de forma $4n + 2, n \in \mathbb{N}$……………………………………4p

b) Suma numerelor impare din A este de forma $4p + 27 = 4(p + 6) + 3, p \in \mathbb{N}$, deci restul împărțirii la 4 este 3……………………………………………………………………………… $3p$

3. a) Dacă $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9$,va rezulta $2S - S = 2^{10} - 1$ și $S = 1023$…………….$2p$

b) Cerința rezultă din inegalitățile

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023 < 2015 < 2047 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 + 2^{10}$……….. $2p$

c) Va rezulta $a = (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \ldots + (2^{2016} - 1) = 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016} - 2015$ deci $b = a + 2015 = 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016} = 2^2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2014})$, care este divizibil cu 4……..$3p$

4. n se scrie $(10 + 1) + (10^2 + 1) + (10^3 + 1) + \cdots + (10^{100} + 1) = (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{100}) + 100$…………………………………………………………………………… $3p$

$n = 10 + (10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{100}) + 100$……………………………………………………..$3p$

Finalizare…………………………………………………………………………………… $1p$

Barem clasa a VI-a

1. a) $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$; x, y fiind numere de două cifre, $x > y$, va rezulta $x = 65, y = 31$ ……………………………………………………………………………………………….$2p$

$z = 31^{65} \cdot 13^{31} + 403 = 31^{65} \cdot 13^{31} + 13 \cdot 31 = 31 \cdot 13(31^{64} \cdot 13^{30} + 1)$; deoarece ultima cifră a lui $13^{30} = 13^{4\cdot 7+2} = (13^4)^7 \cdot 169$ este 9, rezultă că numărul din paranteză se termină cu cifra 0, deci z este divizibil cu $31 \cdot 13 \cdot 5 = 2015$…………………………… $2p$

b) $2^{65} + 2^{31}$ și $3^{65} + 3^{31}$ se termină cu cifra 0, deci numărătorul și numitorul se divid cu 10. ($2^{65} = 2^{4\cdot 16+1}$ are ultima cifră 2, $2^{31} = 2^{4\cdot 7+3}$ are ultima cifră 8, $3^{65} = 3^{4\cdot 16+1}$ are ultima cifră 3, $3^{31} = 3^{4\cdot 7+3}$ are ultima cifră 7)………………………………………………………. $3p$

2. Pentru $n > 3$, $n = 3k$ nu poate fi prim, $n = 3k + 1$ verifică $n + 2 = 3k + 3$ care nu este prim, fiind divizibil cu 3, iar $n = 3k + 2$ verifică $n + 4 = 3k + 6$ care nu este prim, fiind divizibil cu 3. Rezultă că n poate fi 2 sau 3.

Pentru $n = 2$ rezultă numerele 2,4,6 care nu verifică toate prime

Pentru $n = 3$ rezultă numerele 3,5,7 care verifică toate prime, deci numerele sunt 3,5,7 ……………………………………………………………………………………………$3p$

Dacă $m = 3p + 1$, $m = 5q + 2$, $m = 7s + 6$ va rezulta $m + 8 = 3p + 9$ divizibil cu 3, $m + 8 = 5q + 10$ divizibil cu 5, $m + 8 = 7s + 14$ divizibil cu 7, deci $m + 8$ este divizibil cu 3,5,7. Deoarece c.m.m.m.c pentru 3,5,7 este 105, va rezulta $m = 97$ cel mai mic număr care verifică proprietățile……………………………………………………………........... $4p$

3. Ar rezulta $(10a + b) \cdot c = 100a + 10b + c$, $10ac + bc = 100a + 10b + c$, deci

$bc - c = 100a - 10ac + 10b$ sau $(b - 1)c = 10a(10 - c) + 10b$ …… (1)

Din relația din enunț rezultă $c \neq 0$ iar din (1) ar rezulta $b > 1$, deoarece $a > 0, 10 - c > 0$. Din (1) ar rezulta și $10|(b - 1)c$, (b, c cifre , $b > 1, c \neq 0$) deci $2|c$ și $5|b - 1$ sau $2|b - 1$ și $5|c$……………………………………………………………………………………$4p$

Dacă $5|b - 1$, $b > 1$ ar rezulta $b = 6$ și în relația (1), $5c = 10a(10 - c) + 60$ și $5c > 60$, contradicție.

Dacă $5|c$, $c \neq 0$, ar rezulta $c = 5$ și în relația (1), $5(b - 1) = 50a + 10b$ și $5(b - 1) > 60$, contradicție……………………………………………………………………………$3p$

4. Deoarece D este mijlocul lui $[AB]$ va rezulta $2OD = OA + OB$

E este mijlocul lui $[BC]$, rezultă $2OE = OB + OC$

F este mijlocul lui $[AC]$ rezultă $2OF = OA + OC$…………………………………..$4p$

Adunând egalitățile rezultă $2OD + 2OE + 2OF = 2OA + 2OB + 2OC$, de unde se obține relația din enunț……………………………………………………………………..$3p$

TELEORMAN **Olimpiada de matematică**

Etapa locală, 28.02.2015

Clasa a VII-a

1. Fie $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} \dots + \sqrt{3^{2015}}$.
   a) Să se arate că $a + 3^{1008} = a\sqrt{3} + \sqrt{3}$.
   b) Să se arate că $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3}$ este pătratul unui număr natural.

2. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $2\left|x - \sqrt{5}\right| + \left|x - 2\sqrt{5}\right| \in \mathbb{N}$.

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, $D \in (BC)$, paralela prin D la AB intersectează (AC) în E, iar paralela prin D la AC intersectează AB în F.
   Ducem $AG \perp DF$, $G \in DF$ și $AM \perp DE, M \in DE$. Dacă $\{H\} = AG \cap EF$, $\{T\} = DH \cap AB$, $\{V\} = AM \cap EF$ și $\{S\} = DV \cap AC$, să se arate că :
   a) $AT \perp DH$.
   b) $[DT] \equiv [DS]$.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, E este mijlocul lui $[AD]$ și F este mijlocul lui $[DC]$. Dacă $\{M\} = AF \cap BD$ și $\{N\} = BE \cap AC$, să se arate că $MN \parallel AD$.

Clasa a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.
   a) Arătați că $E(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.
   b) Arătați că $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2015) = 1 - \frac{1}{2016^2}$.
   c) Calculați $E(1) \cdot [E(1) + E(2)] \cdot [E(1) + E(2) + E(3)] \cdot \dots \cdot [E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2015)]$.

2. Fie $a, b, c \in [1,2]$. Să se arate că:
   a) $(2a - b)(a - 2b) \leq 0$.
   b) $(a + b)\left(\frac{1}{c} + \frac{c}{ab}\right) \in [4,5]$.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$. În punctul C se ridică perpendiculara pe planul (ABC), pe care se consideră punctul D astfel încât $m\left(\widehat{DBC}\right) = 45^\circ$. Determinați măsura unghiului $\widehat{ABD}$.

4. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ inclusă intr-un plan α. Știind că $AB = a$, $BC = 2a$, $m\left(\widehat{ABC}\right) = 30^\circ$ iar sinusul unghiului plan al diedrului determinat de planele (ABC) și α este egal cu $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, să se determine :
   a) Lungimea segmentului $[AA']$, unde A' este proiecția lui A pe planul α.
   b) Distanța de la A' la planul (ABC).

Barem clasa a VII-a

1.a) Din egalitatea $a - a\sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3^{2016}} = \sqrt{3} - 3^{1008}$ rezultă relația cerută…………$3p$

b) Relația de la a) se mai scrie $a(\sqrt{3} - 1) = 3^{1008} - \sqrt{3}$. Înmulțind egalitatea cu $\sqrt{3} + 1$ rezultă $2a = \left(3^{1008} - \sqrt{3}\right)(\sqrt{3} + 1)$, deci $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3} = 3^{1008} = (3^{504})^2$…………………………..$4p$

2. Dacă $x < \sqrt{5}$ rezultă $2(\sqrt{5} - x) + 2\sqrt{5} - x = 4\sqrt{5} - 3x$, nu verifică……………………$2p$

Dacă $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - x = x$ și $x \in \mathbb{N}$. Deoarece $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$, rezultă $x \in \{3,4\}$……………………………………………………………………..$3p$

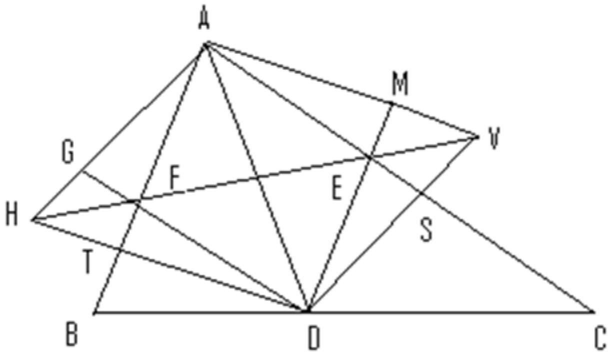
Dacă $x \ge 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + x - 2\sqrt{5} = 3x - 4\sqrt{5}$, nu verifică…………………..$2p$

3.a) $AFDE$ paralelogram, $[AD$ bisectoare, rezultă $AFDE$ romb și $EF \perp AD$ ……………….....$2p$

Deci $HF \perp AD$, $DG \perp AH$ și F este ortocentrul triunghiului AHD, deci $AT \perp DH$………… $2p$

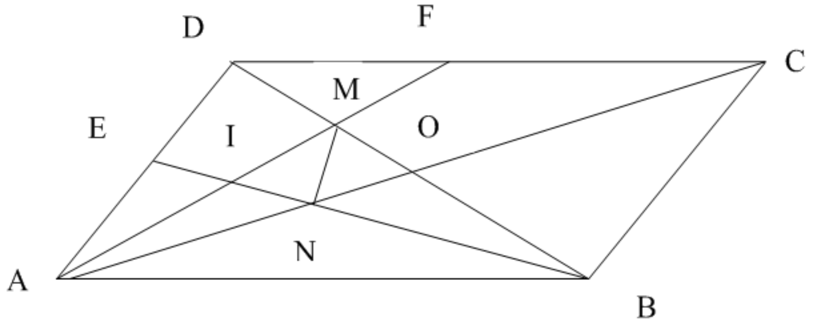
b) În mod asemănător va rezulta E ortocentrul triunghiului AVD, deci $AS \perp DV$……………….$2p$

Triunghiurile dreptunghice ATD și ASD sunt congruente (ipotenuza $[AD]$ comună, $\widehat{TAD} \equiv \widehat{SAD}$) , deci $[DT] \equiv [DS]$……………………………………………………… $1p$



4. Dacă O este intersecția diagonalelor paralelogramului, rezultă M centrul de greutate al triunghiului ADC și N centrul de greutate al triunghiului ADB….$4p$

În aceste triunghiuri, $[DO]$ și $[AO]$ sunt mediane, $\frac{OM}{MD} = \frac{ON}{NA} = \frac{1}{2}$, deci $MN \parallel AD$……………..$3p$



Barem clasa a VIII-a

1.

a) $E(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ ……………………………………………1p

b) $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2015) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots +$

$+ \frac{1}{2015^2} - \frac{1}{2016^2} == \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2016^2}$……………………………………2$p$

c) $E(1) \cdot [E(1) + E(2)] \cdot [E(1) + E(2) + E(3)] \cdot \dots \cdot [E(1) + E(2) + E(3) + \cdots +$

$+E(2015)] = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2016^2}\right)$ ……………2p

$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{2015 \cdot 2017}{2016^2} = \frac{2017}{4032}$ ………………………………………………2p

2. a) $2a, 2b \in [2,4]$, iar $a, b \in [1,2]$, deci $2a - b \geq 0$, $a - 2b \leq 0$……………………………………3p

b) Efectuând calculul, $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \in [4,5]$

Folosind inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, x, y > 0$ rezultă $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 4.$ …………2p

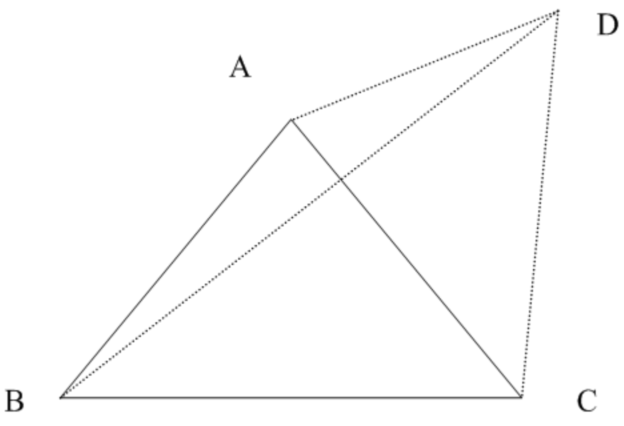
Din inegalitatea de la a) rezultă $2a^2 - 5ab + 2b^2 \leq 0$ sau $\frac{a^2+b^2}{ab} \leq \frac{5}{2}$………………………………1$p$

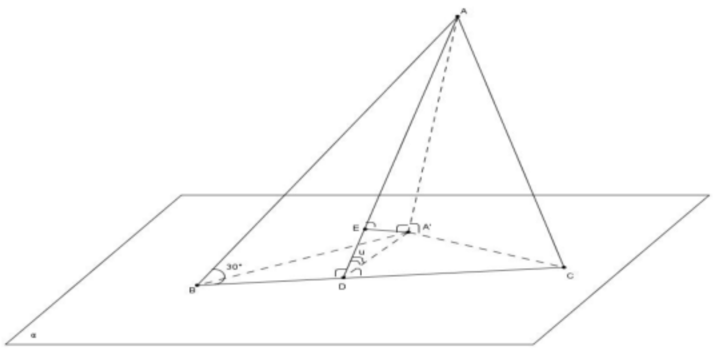
$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+c^2}{bc} \leq \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$……………………………………………………1$p$

3. Din teorema celor trei perpendiculare va rezulta $AD \perp AB$……………………………………………2p

Notând $AB = a$ rezultă $BC = a\sqrt{2}$, $DC = BC = a\sqrt{2}$, iar în triunghiul dreptunghic CAD, $AD = a\sqrt{3}$………3p

În triunghiul dreptunghic ABD va rezulta $tg\widehat{ABD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$, deci $m(\widehat{ABD}) = 60°$…………2p





4. a) Notăm cu D proiecția lui A pe BC.

În triunghiul ABD, $AD = AB\ sin30^{\circ}$, deci $AD = \frac{a}{2}$

În triunghiul ADA', $sin(\widehat{ADA'}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{AA'}{\frac{a}{2}}$ și $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ ……………………3p

b) În triunghiul dreptunghic ADA', $AD = \frac{a}{2}$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ și va rezulta $A'D = \frac{a}{6}$…………1p

Ducând $A'E \perp AD, E \in (AD)$, va rezulta $A'E \perp (ABC)$, deoarece $A'E$ este perpendiculară și pe BC $(BC \perp (ADA'))$.

Deci $A'E = d(A', (ABC))$, iar în triunghiul dreptunghic ADA', $A'E = \frac{AA' \cdot A'D}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{9}$

……………………………………………………………………………………………3p

(în figură u este măsura unghiului plan al diedrului).