INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TULCEA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2015
CLASA a V-a A

1. Un număr natural se împarte la 2, din rezultat se scade 10, apoi noul rezultat se împarte la 11. Ştiind că în final obținem 2, aflați numărul inițial.

2. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{abab}$, ştiind că $\overline{ab} - \overline{ba}$ = a + 3b.

3. Suma a trei numere naturale este 2013. Dacă împărţim fiecare număr la acelaşi număr natural n obţinem câturile 11, 19, respectiv 27 şi acelaşi rest nenul. Ştiind că restul este divizibil cu 2 şi cu 3 în acelaşi timp, să se determine cele trei numere.

   Notă: Timp de lucru: 2 ore Toate subiectele sunt obligatorii Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 Nu se acordă puncte din oficiu

CLASA a VI-a A

1. Rezolvați in mulțimea numerelor prime următoarea ecuație: 2m +3p + 4t =56.
2. Se dau numerele: a= $\frac{1}{2}+ \frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+ \frac{99}{100}$ și b = $\frac{1}{2}+ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+ \frac{1}{100}$.
   a) Calculați: a+ b
   b) Dacă c=100 – b. Comparați a cu c.
3. Se consideră unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$, astfel încât bisectoarele lor [OM și [ON să formeze un unghi de 75^0.
   a) Să se determine m($\widehat{AOB}$) și m($\widehat{BOC}$) știind că 3 m($\widehat{AOB}$) = 2 m($\widehat{BOC}$).
   b) Dacă semidreapta [OT formează unghi drept cu semidreapta [OM astfel încât punctele M și T sunt de aceeași parte cu punctul B față de punctul A. Calculați: m($\widehat{TON}$) ,m($\widehat{BON}$), m($\widehat{BOT}$), m($\widehat{COT}$).

   Notă: Timp de lucru: 2 ore Toate subiectele sunt obligatorii Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 Nu se acordă puncte din oficiu

Inspectoratul Şcolar Judeţean Tulcea

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală, 28.februarie.2015
CLASA a VIII-a

Subiectul I

Să se determine $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ ştiind că

$$\left[\sqrt{\sqrt{x^2+4}+\mathrm{x}}+\sqrt{\sqrt{x^2+4}-\mathrm{x}}\right]=\mathbf{2},$$

unde cu [x] se notează partea întreagă a numărului x.

Subiectul II

Determinaţi valorile întregi ale lui x şi y astfel încât

$$x-3y+4=0 \quad \text{şi} \quad \sqrt{x^2+7y^2+8x+8y+4} \in \mathbb{Q}$$

Subiectul III

Fie $\mathbf{ABCAA'B'C'}$ o prismă triunghiulară regulată în care $\mathbf{AB=a}$, $\mathbf{AA'}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\mathbf{R}$ centrul feţei $\mathbf{ACC'A'}$.

a) Determinaţi distanţa de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{AB}$.

b) Dacă $\mathbf{M}$ este mijlocul lui $[\mathbf{AB}]$ iar $\mathrm{Q} \in [\mathbf{MC'}]$ astfel încât $\mathrm{MQ}=\frac{1}{3}\mathbf{MC'}$, calculaţi $\mathbf{RQ}$.

c) Demonstraţi că planele $(\mathbf{ABC'})$ şi $(\mathbf{BCA'})$ sunt perpendiculare.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Tulcea

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală, 28.februarie.2015
CLASA a VII-a

Subiectul I

a) Fie $x=\frac{6}{1}+\frac{11}{2}+\frac{16}{3}+\cdots+\frac{10076}{2015}-\left(1+2^{-1}+3^{-1}+\cdots+2015^{-1}\right)$. Calculaţi $\left(2014-\frac{x}{5}\right)^{-2015}$

b) Aflaţi numerele întregi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ştiind că $x^2-x+|y-3|+\left(z^2-16\right)^2 \leq 0$.

Subiectul II

Fie $\mathbf{n}$ un număr natural cu proprietatea că prima zecimală a numărului $\sqrt{n}$ este $\mathbf{2}$.

a) Daţi două exemple numerice de astfel de numere.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale cu această proprietate.

Subiectul III

În paralelogramul $\mathbf{ABCD}$ notăm cu $\mathbf{M}$ mijlocul lui $\mathbf{AB}$, $\mathbf{N}$ mijlocul lui $\mathbf{CM}$, $\mathbf{DN} \cap \mathbf{BC}=\{\mathbf{P}\}$ şi $\mathbf{DN} \cap \mathbf{AB}=\{\mathbf{Q}\}$.
Demonstraţi că triunghiurile $\mathbf{NCP}$ şi $\mathbf{PBQ}$ au aceeaşi arie.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte

	BAREM CLASA a VII-a	
Sub. I	a) $x = 5 + 1 + 5 + \frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{3} + \cdots + 5 + \frac{1}{2015} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2015}\right) = 5 \cdot 2015$ $\left(2014 - \frac{x}{5}\right)^{-2015} = (-1)^{-2015} = -1$ b) Oricare x,y,z numere întregi $x^2 - x \geq 0$ $\|y - 3\| \geq 0$ $(z^2 - 16)^2 \geq 0$ Deci, $x^2 - x + \|y - 3\| + (z^2 - 16)^2 = 0$ Egalitatea are loc dacă $x^2 - x = 0, \|y - 3\| = 0, (z^2 - 16)^2 = 0$ Finalizare, soluţiile sunt (0,3,4),(0,3,-4),(1,3,4),(1,3,-4)	1 p 1 p 2p 1p 1p 1p
Sub. II	**a)** Oricare două numere cu proprietatea cerută.(Ex: 5,28,39,52,53,…) **b)** Pentru n număr cu proprietatea respectivă, fie $k = [\sqrt{n}]$, $0{,}2 \leq \{\sqrt{n}\} < 0{,}3 \Rightarrow 0{,}2 + k \leq \sqrt{n} < 0{,}3 + k$. Ridicând relaţia la pătrat se obţine $(0{,}2 + k)^2 \leq n < (0{,}3 + k)^2$. Există cel puţin un astfel de număr natural n, dacă $(0{,}3 + k)^2 - (0{,}2 + k)^2 > 1 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot (2k + 0{,}5) > 1 \Rightarrow k > 4{,}75$. Deci pentru $k \geq 5$ există cel puţin un n cu proprietatea dată⟹număr infinit de numere. k=5⟹n=28, k=6⟹n=39,k=7⟹n=52 sau 53	1p 2 p 2 p 2p
Sub. III	(ULU) ΔCDN≡ΔMNQ. Deci DC=MQ reiese apoi că B este mijlocul lui [MQ], deci aria ΔMNB este aceeaşi cu aria ΔNBQ. Dar [BN] mediană în ΔMBC deci aria ΔMNB este aceeaşi cu aria ΔNBC. Finalizare. (Se scade aria ΔBNP)	2 p 2+1 p 1p 1p

	BAREM CLASA a VIII-a	
Sub. I	$2 \leq \sqrt{\sqrt{x^2+4} + x} + \sqrt{\sqrt{x^2+4} - x} < 3$ Aplicare binom la pătrat, produsul sumei cu diferenţa Finalizare, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	1 p 2+2 p 2p
Sub. II	$x + 4 = 3y$ $x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = (x + 4)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = 16y^2 + 8y - 12 =$ $= (4y + 1)^2 - 13$ $\sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$ dacă $(4y + 1)^2 - 13 = k^2, k \in \mathbb{Q}$ $(4y + 1 + k)(4y + 1 - k) = 13$ Analizând cazurile posibile, soluţia este x=-10, y=-2	1p 2p 2p 2p
Sub. III	Fie N mijlocul lui [BC], P mijlocul lui [AC]. a) Fie PS⊥AB. Din Th celor trei perpendiculare d(R;AB)=RS. RS=$\frac{3a}{4}$ **b)** Q= centrul de greutate al ΔABC' RQ=$\frac{1}{3}$RB=$\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **c)** Fie MT⊥RB , dem. că unghiul între cele două plane este $\widehat{MTN}$. Se verifică reciproca Th. Pitagora în ΔMNT, finalizare.	 1p 1p 1p 1p 2p 1p