Bacau

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a V-a

SUBIECTUL I

Se dă șirul de numerele: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19......... .

a) Stabiliți dacă termenul al 22-lea din şir este pătrat perfect.
b) Aflați termenul al 2015-lea al șirului.

SUBIECTUL II

Calculați suma numerelor naturale, cuprinse între 400 si 600, care împărțite la 12 dau restul 10.

SUBIECTUL III

Fie m un număr natural nenul. Se consideră mulțimile:

$A=\{ x \in N / x=2^n -1, n \in N^*, n \leq m \}$ şi $B=\{ y \in N / y=2^{n-1}, n \in N^*, n \leq m \}$.

a) Stabiliți de ce mulțimea $A \cap B$ nu poate avea mai mult de un element.
b) Determinați numărul m știind că mulțimea $A \cup B$ conține doar numere consecutive.
c) Determinați valoarea minimă a numărului m astfel încât propoziția "$1023 \in A$" să fie adevărată.
d) Care este valoarea maximă a numărului m dacă mulțimea B conține exact 8 pătrate perfecte?

SUBIECTUL IV

Fie numărul natural $n = \overline{11\ldots1} + \overline{22\ldots2} + \ldots + \overline{88\ldots8} + \overline{99\ldots9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa\ldots a}$ conţinând câte 2015 cifre de a. Determinaţi câte cifre de 9 conţine numărul n .

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

Fie mulţimile $A = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2015 \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbf{Q} \middle| x = \frac{a}{b}, a \in D_{12}, b \in D_6 \right\}$. Calculați:

a) produsul tuturor elementelor mulţimii A;
b) produsul tuturor elemetelor mulţimii B .

SUBIECTUL II

a) Fie a, b, c numere naturale cu proprietatea că $2a + 7b = 5c$. Demonstrați că produsul $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a)$ este divizibil cu 70.
b) Cinci numere naturale au proprietatea că suma oricăror patru dintre ele este un multiplu de 5. Demonstrați că toate numerele sunt divizibile cu 5.

SUBIECTUL III

Se consideră unghiurile adiacente AOB şi BOC astfel încât măsura unghiului BOC este de 5 ori mai mare decât măsura unghiului AOB. Se construiesc OM bisectoarea unghiului BOC, ON semidreapta opusă semidreptei OM şi DO perpendiculară pe MN, D şi A de o parte şi de alta a dreptei MN. Ştiind că măsura unghiului AON este cu 30° mai mare decât dublul măsurii unghiului DOC, să se afle măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD şi AON.

SUBIECTUL IV

În interiorul segmentului AB cu lungimea de 160 cm, se consideră punctele C si D astfel încât 3CA = 2CB iar 5AD = 3DB.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor CA și CB;
b) Să se stabilească ordinea punctelor A, B, C și D pe dreapta AB;
c) Dacă O este mijlocul segmentului AB, să se calculeze raportul segmentelor OC și OD.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

Determinaţi numărul natural nenul n astfel încât $\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+......+\frac{2}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$.

SUBIECTUL II

Un pătrat cu latura de 4 cm este împărţit în 16 pătrățele cu latura de 1 cm . În fiecare dintre pătrăţele putem scrie exact unul din numerele $0, \sqrt{2015}$ şi $-\sqrt{2015}$. Se folosesc toate cele trei numere .

După această completare, calculăm sumele de pe fiecare coloană, de pe fiecare linie și de pe cele două diagonale.

a) Demonstrați că cea mai mică sumă posibilă ce se poate obține este număr irațional.

b) Se poate completa pătratul astfel încât toate sumele considerate să fie egale ? Exemplificați.

c) Se poate completa pătratul astfel toate sumele considerate să fie diferite ? Justificați.

SUBIECTUL III

Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri consecutive dintr-un paralelogram.

SUBIECTUL IV

ABCD este un paralelogram în care punctele E și F sunt mijloace pentru laturile [AB], respectiv [AD]. Dacă segmentele [EC] și [FC] au aceeași lungime, demonstrați că ABCD este romb.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

Fie numerele reale x și y, astfel încât $x + y \geq 3$.

a) Arătați că $(x+1)^2 + (y+1)^2 > 12$.

b) Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x-1)^4 + (y+2)^4$.

SUBIECTUL II

a) Fie numerele raționale pozitive x și y, astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ este număr rațional. Arătați că $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ sunt numere raționale.

b) Rezolvați în $N \times N$ ecuația: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}-2} = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL III

Considerăm piramida *VABC*, cu baza triunghiul *ABC* echilateral. Semidreptele *[AX, [BY, [CZ* sunt bisectoare ale unghiurilor $\widehat{VAB}$, $\widehat{VBC}$, respectiv $\widehat{VCA}$,unde $X \in (VB)$, $Y \in (VC)$ și $Z \in (VA)$. Arătați că piramida este regulată dacă și numai dacă planele *(ABC) și (XYZ)* sunt paralele.

SUBIECTUL IV

Fie *VA,* o dreaptă perpendiculară pe planul unui triunghi *ABC,* cu $m(\hat{A}) = 90^0$, $m(\hat{B}) = 75^0$, BC = $4(\sqrt{3}+1)$ cm și $VA = 25\% \cdot BC$. Să se afle:

a) Distanța de la punctul V la dreapta *BC*.

b) Distanța dintre dreptele *AC* și *VB*.

(Considerăm cunoscut faptul că $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a V-a
Soluţii şi barem de corectare

SUBIECTUL I
a) Dacă se stabileşte că termenul general are forma $T_n= 3(n-1) + 1$,

atunci $T_{22}= 3(22-1) + 1= 64$ care este pătrat perfect. .... 4p.

Dacă nu se foloseşte termenul general şi se face efectiv enumerarea, se poate găsi al 22-lea termen şi se acordă cele 4 p.

b) $T_{2015}= 3(2015-1) + 1= 6043$ 3p

Barem: a) 4p
b) 3p

SUBIECTUL II
x : 12= a, rest 10; deci x= 12a + 10. .... 1p

Deoarece numerele sunt cuprinse între 400 şi 600, apar astfel:

$12 \cdot 33 + 10 = 406$

$12 \cdot 34 + 10$

$12 \cdot 35 + 10$

.

.

.

$12 \cdot 49 + 10 = 598$. 2p

- justificarea că sunt 17 numere 1p

Adunând relaţiile, obţinem $12(33+34+35+..... +49) +10 \cdot 17$ 1p

$12 (S_{49} – S_{32}) + 170 = 8534$ 2p

Barem: 7p

SUBIECTUL III
A={ 1,3,7,15,31,63,........} si B={1,2,4,8,16,32,..........}

a) cu excepţia lui 1, B conţine doar numere pare, iar A conţine doar numere impare. Singurul element comun poate fi 1. .... 1p
Observaţie :Dacă elevul nu explică complet ci doar scrie că pentru m=1 ⇒n=1⇒ $A \cap B =\{1\}$ atunci se acordă 0,5 p.
b) Dacă m=2 ⇒ n∈ {1,2} ⇒ A={1,3} si B={1,2}, atunci AUB={1,2,3}, singura care are numere consecutive 2p

c) $1023 \in A$, deci $2^n - 1 = 1023$, n=10 deci m=10. .... 2p

d) $y = 2^{n-1}$ este p.p. dacă n-1 este par.

Primele 8 p.p. se obțin pentru primii 8 exponenți pari, adică

$n-1 \in \{0,2,4,6,8,10,12,14\}$, $n \in \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

Valoarea maximă a lui m este16. ....2p

Observație: Dacă un elev consideră m=15 în loc de m=16 atunci se acordă ….1,75p

Barem: a) 1p
b) 2p
c) 2p
d) 2p

SUBIECTUL IV

Are loc $n = \overline{11\ldots1} + \overline{22\ldots2} + \ldots + \overline{88\ldots8} + \overline{99\ldots9} = (1+2+\ldots+8+9)\cdot\overline{11\ldots1}$ ……….1 punct .

$1+2+\ldots+8+9=45$ ………..2 puncte .

Obţinem $n = 45\cdot\overline{11\ldots1}$, ………..2 puncte .

relaţie ce ne conduce la $n = \overline{499\ldots95}$, număr ce are 2016 cifre ………...1 puncte .

Finalizare, n conţine 2014 cifre de 9 …………1 punct .

Barem: 7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VI-a
14.02.2015

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL I

a) Fracţiile sunt de forma $\frac{k}{2015-k}$, unde k ia valori de la 1 la 2014 ....1p

Produsul numărătorilor este $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014$ ca şi al numitorilor.......................................1p

Produsul fracţiilor este 1 ....1p

b) Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 12 şi ai lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6 ……………………........1p

Se consideră toate combinaţiile, care sunt în număr de 24 deoarece fiecare divizor al lui 12 apare de 4 ori, iar fiecare divizor al lui 6 apare de 6 ori.

Se elimină fracțiile echivalente.............. ....…………………………......1p

Finalizare, se obține 2^6 .... 2p

TOTAL 7p

SUBIECTUL II

a) $7(a+b)=5(a+c) \rightarrow$ 7 divide $a+c$ şi 5 divide $a+b$ 1p

$2a+12b=5(b+c) \rightarrow$ 2 divide $b+c$ 1p

$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ divide $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$ 1p

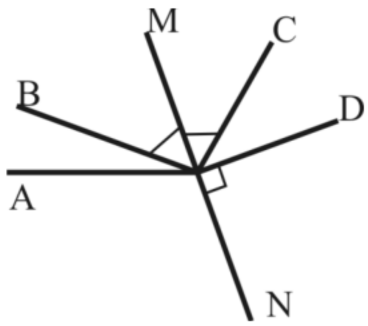
b) Dacă S este suma celor cinci numere și x, y două numere dintre acestea, din $S-x$ și $S-y$ divizibile cu 5, rezultă că $(S-x)-(S-y)=y-x$ este divizibil cu 5 .... 2p

cele cinci numere dau același rest r la împărțirea cu 5 .... 1p

Suma a patru numere dintre ele va fi de forma $5k+4r$, care este multiplu de 5 numai pentru $r=0$, deci cele cinci numere sunt multipli de 5 ....1p

TOTAL 7p

SUBIECTUL III



Din ipoteză avem m(∢BOC) = 5· m(∢AOB)..1p

m(∢COD) = 90° - m(∢MOC) adică m(∢COD) = 90° - 2,5 · m(∢AOB) 1p

m(∢AON) = 180° - 3,5· m(∢AOB).. 1p

m(∢AON) = 2· m(∢DOC) + 30°, ...1p

1,5· m(∢AOB) = 30° și prin urmare m(∢AOB) = 20°..1p

Așadar m(∢AOB) = 20°, ...1p

m(∢BOC) = 100°, m(∢COD) = 40° iar m(∢AON) = 110°...1p

TOTAL 7p

SUBIECTUL IV

a) Din AB = AC + CB avem 2AB = 2AC + 2CB, adică 2AC + 2CB = 320...........….........1p

Înlocuind 2CB = 3AC se găsește 2AC + 3AC = 320, adică 5AC = 320……………….......1p

De unde AC = 64 cm iar CB = 96 cm ………………………………………………….......1p

b) Din AB = AD + DB avem 3AB = 3AD+ 3DB, de unde 8AD = 480……………….......1p

De unde AD = 60 cm , DB = 100 cm şi ordinea punctelor este A, D, C, B…......................1p

c) Din O mijlocul lui AB rezultă OA = 80 cm, de unde OC = OA – AC = 16 (cm)

iar OD = OA – DA = 20 (cm) ……………………………………………………….......1p

Așadar raportul OC/OD = 4/5 …………………………………………………................1p

TOTAL 7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a VII-a
BAREM

SUBIECTUL I

$$\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+......+\frac{n-(n-2)}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$$ 2p

$$\frac{5}{3\cdot 5}-\frac{3}{3\cdot 5}+\frac{7}{5\cdot 7}-\frac{5}{5\cdot 7}+......+\frac{n}{(n-2)\cdot n}-\frac{(n-2)}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$$ 2p

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....................+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}=\frac{332}{999}$$ 1p

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\frac{332}{999}\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{332}{999}=\frac{1}{n}$$ 1p

$$\frac{1}{999}=\frac{1}{n}\Rightarrow n=999$$ 1p

SUBIECTUL II

a) Cea mai mică sumă posibilă ce se poate obține este $-4\sqrt{2015}$......2P
Se arată că $\sqrt{2015}$ este irațional apoi folosim faptul că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este număr irațional......1P

b) Este posibil

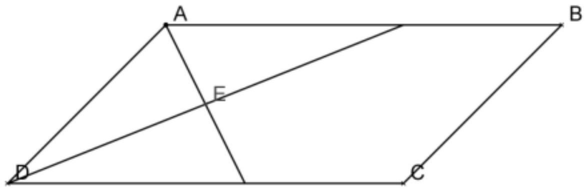
0	$\sqrt{2015}$	$-\sqrt{2015}$	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	$-\sqrt{2015}$	$\sqrt{2015}$	0

......2P

c) Nu este posibil. În fiecare din sume participă numerele $0, \sqrt{2015}$ și $-\sqrt{2015}$. Rezultă că sumele posibile sunt $-4\sqrt{2015}, -3\sqrt{2015}, -2\sqrt{2015}, -\sqrt{2015}, 0, \sqrt{2015}, 2\sqrt{2015}, 3\sqrt{2015}, 4\sqrt{2015}$, exact 9 numere......1P
Cum avem 10 sume rezultă conform principiului lui Dirichlet că cel puțin două sume sunt egale..1P

SUBIECTUL III

Considerăm paralelogramul $ABCD$ şi bisectoarele unghiurilor $\angle BAD, \angle ADC$ ce se intersectează în punctul E, conform desenului.



$\angle BAD$ și $\angle ADC$ unghiuri consecutive…………………………………...1 punct

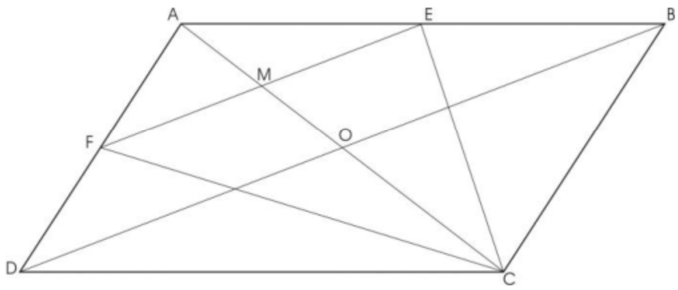
$m(\angle BAD)+m(\angle ADC)=180^\circ$ ………………………….…………….. 2 puncte

$$m(\angle EAD)+m(\angle EDA)=\frac{1}{2}m(\angle BAD)+\frac{1}{2}m(\angle ADC)=\frac{1}{2}\left[m(\angle BAD)+m(\angle ADC)\right]=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

……….……………………………………………………………………………….2 puncte

$m(\angle AED)=180^\circ-\left[m(\angle EAD)+m(\angle EDA)\right]=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ …………..2 puncte.

SUBIECTUL IV



În triunghiul ABD, [FE] este linie mijlocie (pe baza definiției). 1p

Deci, FE ‖ BD.

În triunghiul ADO, [FM] este linie mijlocie (pe baza teoremei reciproce). 1p

În triunghiul ABO, [EM] este linie mijlocie (pe baza teoremei reciproce).

ABCD paralelogram $\Rightarrow [DO]\equiv[OB]$ 1p

Rezultă că $FM=\dfrac{DO}{2}$ și analog $EM=\dfrac{OB}{2}$, ceea ce conduce la FM = ME. 1p

În triunghiul FEC isoscel, [CM] este mediană, deci și înălțime. 1p

CM ⊥ FE și FE ‖ BD ⇒ CM ⊥ BD. 1p

Paralelogramul cu diagonalele perpendiculare este romb. 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA A VIII-A

Problema 1.

Problema1	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	$(x+y)^2 \geq 9$	1
	$x^2+y^2 \geq \frac{9}{2}$	2
	$2x+2y \geq 6$	1
	$(x+1)^2+(y+1)^2 \geq \frac{9}{2}+6+2>12$	1
b)	Folosind inegalitatea: $2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2$	
	$(x-1)^4+(y+2)^4 \geq \frac{1}{2}[(x-1)^2+(y+2)^2]^2$	1
	$\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(x-1+y+2)^4 \geq \frac{1}{8} \cdot 4^4 = 32$	1

Problema 2.

Problema2	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	$\sqrt{x} = r - \sqrt{y}$	1
	$x = r^2 - 2r\sqrt{y} + y$	1
	$\sqrt{y} = \frac{r^2+y-x}{2r} \in Q$	2
b)	Aducerea la forma $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$	1
	Conform a) rezultă $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in N$	1
	(x,y)$\in \{(1,36),(4,25),(9,16),(16,9),(25,4),(36,1)\}$	1

Problema 3.

Problema3	Etapa de rezolvare	Punctaj
	Conform teoremei bisectoarei in ABV avem $\frac{VX}{XB}=\frac{VA}{AB}$	1
$\rightarrow$	$\frac{VA}{AB}=\frac{VB}{BC}=\frac{VC}{CA} \rightarrow \frac{VX}{XB}=\frac{VY}{YC}=\frac{VZ}{ZA}$	2
	XY $\parallel$ BC si XZ $\parallel$ AB $\rightarrow$ (ABC) $\parallel$ (XYZ)	1
$\leftarrow$	(ABC) $\parallel$ (XYZ) $\rightarrow \frac{VA}{AB}=\frac{VB}{BC}=\frac{VC}{CA}$	2
	AB=BC=CA $\rightarrow$ VA=VB=BC $\rightarrow$ piramida regulata	1

Problema 4.

Problema4	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	AT $\perp$ BC, AT= $\sqrt{3}+1$	2
	d(V, BC)= VT= $(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$	1
b)	AB = BC sin 15= $2\sqrt{2}$	1
	AU $\perp$ VB deci d(AC, VB)= AU	2
	AU=$\frac{VA\cdot AB}{VB}$, calcul algebric	1