INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a V-a

Problema 1. Fie x şi y două numere naturale nenule astfel încât $2015^x - 2013 = x + y$.
Verificaţi dacă y este pătrat perfect, ştiind că:

$$3x + 6x + 9x + ... + 102x = 3570.$$

Graţiela Popa, Slatina

Problema 2. Un număr natural de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferenţa dintre cifra sutelor şi cifra unităţilor numărului este egală cu 4. Aflaţi numărul.

Mihai Ilie, Slatina

Problema 3. Fie A un număr natural care nu se divide cu 5 şi B câtul împărţirii lui A la 5. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a lui A. Arătaţi că dacă $u(A) < 5$ atunci B este număr par, iar dacă $u(A) > 5$, atunci B este număr impar.

Gazeta Matematică nr. 10/2014

Problema 4. Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se aşază biscuiţi de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm şi lăţimea de 2 cm, fără a depăşi marginile farfuriei. Biscuiţii vin în pachete de câte 15 bucăţi.

a) Arătaţi că oricum am aşeza biscuiţii din 5 pachete, aceştia nu pot acoperi complet farfuria.

b) Arătaţi că dacă pe farfurie se pun biscuiţii din 16 pachete, există cel puţin 4 biscuiţi care se suprapun (nu neapărat complet).

Marius Perianu,Slatina

Clasa a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele a, b, c, d ştiind că $\dfrac{\overline{abcd}}{8625} = \overline{1,0ac}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2014

Problema 2. Împărţind numărul natural nenul m pe rând la 7, 8 şi 9 obţinem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărţind numărul natural nenul n pe rând la 8 şi 9 obţinem resturile 5, respectiv 7.

Arătaţi că fracţia $\dfrac{m+20}{n+11}$ este divizibilă cu 72.

Ion Neaţă, Slatina

Problema 3. Arătaţi că numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2039}$ este divizibil cu 2015.

Daniel Cojocaru, Slatina

Problema 4. Se consideră punctele coliniare $M_1, M_2, M_3, ..., M_{2015}$ în această ordine, astfel încât $M_1M_2 = 2$ cm, $M_2M_3 = 2M_1M_2$, $M_3M_4 = 2M_2M_3$, …, $M_{2014}M_{2015} = 2M_{2013}M_{2014}$.

a) Calculaţi lungimea segmentului $[M_1M_{200}]$.

b) Comparaţi lungimile segmentelor $[M_1M_{200}]$ şi $[M_{200}M_{300}]$.

c) Demonstraţi că pentru orice numere naturale a, b, c, d, cu $1 \le a < b \le c < d \le 2015$, segmentele $[M_aM_b]$ şi $[M_cM_d]$ au lungimi diferite.

Dorin Popa, Slatina

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VII-a

Problema 1. Se consideră pătratul *ABCD* în care se notează cu *M* mijlocul laturii [*AB*]. Fie *E* punctul de intersecţie al dreptelor *BD* şi *CM*. Arătaţi că $DM \perp AE$.

Graţiela Popa, Slatina

Problema 2. **a)** Arătaţi că oricare ar fi numerele reale *a*, *b*, *c* are loc relaţia $|a+b|+|a+c|\geq|b-c|$.
b) Demonstraţi că pentru orice număr real *x* are loc inegalitatea:

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+...+|x+2014|\geq 1007^2.$$

Gazeta Matematică nr. 11/2014

Problema 3. Se consideră numărul natural $n=\overline{abcd}$ şi $x=\sqrt{\overline{ab},(\overline{cd})+\overline{bc},(\overline{da})+\overline{cd},(\overline{ab})+\overline{da},(\overline{bc})}$, unde *a*, *b*, *c*, *d* sunt cifre nenule.
a) Ştiind că *x* este raţional, determinaţi cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua *n*.
b) Arătaţi că dacă *x* este număr natural, atunci *n* are cel puţin două cifre egale.

Marius Perianu, Slatina

Problema 4. Fie triunghiul *ABC* şi punctele $D, E, F \in (BC)$ astfel încât [*AD* este bisectoarea unghiului *BAC*, [*AE* este bisectoarea unghiului *BAD* şi [*AF* este bisectoarea unghiului *CAD*. Arătaţi că:

$$AE\cdot\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right)=AF\cdot\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}\right).$$

Ion Neaţă, Slatina

Clasa a VIII-a

Problema 1. **a)** Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z, t are loc egalitatea:

$$(xz+yt)^2+(xt-yz)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2)$$

b) Numerele raţionale pozitive *a*, *b*, *c*, *d* verifică simultan egalităţile:

$$a^2+b^2=9, \qquad c^2+d^2=16, \qquad ac+bd=12.$$

Arătaţi că numărul $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c\sqrt{3}+d}$ este raţional.

Ion Neaţă, Slatina

Problema 2. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia:

$$2x^2+2y^2-3x-3y+2=0.$$

Gazeta Matematică nr. 9/2014

Problema 3. Determinaţi numerele reale *a* şi *b* care verifică egalitatea

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}+\sqrt{b+2014}-2-\frac{a+b}{2}=0.$$

Iuliana Traşcă, Scorniceşti

Problema 4. Se consideră rombul *ABCD* în care $AB=6$ cm şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. De aceeaşi parte a planului (*ABC*) se ridică perpendicularele *AM* şi *CQ* pe planul (*ABC*) astfel încât $AM=9$ cm şi $CQ=3$ cm.
a) Demonstraţi că planele (*MBD*) şi (*QBD*) sunt perpendiculare.
b) Calculaţi distanţa dintre dreptele *BD* şi *MQ*.
c) Determinaţi cosinusul unghiului format de planele (*MBQ*) şi (*ABC*).

Dorin Popa, Slatina