OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V-a

1. Fie $a = 2015 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014)$ şi $b = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2015$.

a) Arătaţi că a şi b sunt pătrate perfecte .

b) Arătaţi că $2015 + a < 4b$

Prof. Gobej Adrian, Curtea de Argeş

2. Determinaţi numerele naturale prime a, b şi c pentru care are loc egalitatea $2a + 5b + 6c = 50$.

GM 5/2014

3. Determinaţi mulţimile X şi Y ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

(i) $X \cup Y \subset \{1; 2; 3; 4\}$;

(ii) $X \cap Y \supset \{1; 2\}$;

(iii) $X \setminus Y \subset \{1; 2; 4\}$;

(iv) $\{1; 2; 3\} \not\subset Y$;

(v) X are mai puţine elemente decât Y.

****

4. Pentru o excursie şcolară s-au închiriat autocare la preţul de 5 lei pe kilometru, iar lungimea traseului a fost stabilită la 600 km. Din diferite motive, 6 elevi s-au retras din excursie, iar traseul efectiv a fost mai scurt, în aşa fel încât preţul transportului pe elev nu s-a modificat. Ştiind că s-au plătit 2700 lei pentru autocare, aflaţi lungimea efectivă a traseului parcurs şi numărul de elevi înscrişi iniţial.

Prof. Constantin Bozdog, Reghin

NOTĂ: Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VI-a

1. Aflaţi numărul natural $\overline{xy}$ dacă $\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}} = \frac{4}{7}$.

GM 5/2014

2. Arătaţi că numărul $N = 1+7+7^2+\ldots\ldots+7^{2015}$ este divizibil cu 200.

prelucrare GM 2014

3. Se consideră segmentul AB şi O mijlocul său. Pe o dreaptă **d** ce trece prin O (diferită de AB) se consideră de o parte şi de alta a lui O punctele M şi N (M, N $\in$ ***d)*** astfel încât unghiurile $\sphericalangle$ MBO şi $\sphericalangle$ NAO sunt congruente. Arătaţi că [MA] $\equiv$ [NB].

* * *

4. Se consideră două unghiuri adiacente şi suplementare. Bisectoarea celui mai mare dintre ele formează cu o latură a celuilalt un unghi de 110°. Aflaţi măsurile celor două unghiuri.

* * *

NOTĂ: Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}$.

b) Fie $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}$. Determinaţi $\left[x\sqrt{2015}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

* * *

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=c^2$ şi a ≤ b. Arătaţi că:

a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\notin\mathbb{Q}$;

b) există a, b cu $a\not\vdots 5, b\not\vdots 5$ şi cmmdc $(a,b)=1$, astfel încât $\sqrt{a^2b^2+c^2}\in\mathbb{N}$.

Laurenţiu Ţibrea

3. În paralelogramul *ABCD*, considerăm $AC\cap BD=\{O\}$, $M,N\in(AC)$ astfel încât *A-M-N* şi $(AM)\equiv(NC)$. Dacă $DM\cap BC=\{L\}$ şi $BN\cap AD=\{T\}$, arătaţi că:

a) $(DN)\equiv(BM)$;

b) *L*, *O*, *T* sunt coliniare.

* * *

4. În triunghiul *ABC* cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, considerăm bisectoarea [*BE*, $E\in[AC]$ şi un punct *D* pe $[BC]$ astfel încât $BC=3BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi *F* este mijlocul lui $[AB]$, arătaţi că *F*, *O* şi *C* sunt coliniare.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VIII-a

1. Fie ecuaţia: 7(1-x):m - 2x = 2(1-x), cu m parametru real nenul.
a) Să se rezolve ecuaţia.
b) Să se determine m număr întreg pentru care partea întreagă a soluţiei ecuaţiei este egală cu 1.

2. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că:
a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\geq\frac{4}{x+2y}$
b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică de aceeaşi parte perpendicularele AM şi CN.
a) Să se arate că dreptele MN şi BD sunt perpendiculare.
b) Dacă AB=3, AM=4, CN=4-$\sqrt{7}$, să se calculeze distanţele de la M la BN şi de la M la planul (BCN).

4. Fie piramida patrulateră regulată VABCD, {O}=AC$\cap$BD şi P, Q $\in$(VO). Dacă {E}=AP$\cap$CV, {F}=CP$\cap$AV, {S}=BQ$\cap$DV şi {T}=DQ$\cap$BV, arătaţi că măsura unghiului dintre dreptele EF şi ST nu depinde de alegerea punctelor P şi Q pe segmentul VO.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V-a

Soluţii

1.

a) $a = 2015 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2014) = 2015 + 2 \cdot 2014 \cdot 2015 : 2 =$

$= 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015(1+2014) = 2015 \cdot 2015 = 2015^2$

$b = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2015 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2015 - (2 + 4 + ... + 2014) =$

$= 2015 \cdot 2016 : 2 - 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1007) =$

$= 2015 \cdot 1008 - 2 \cdot 1007 \cdot 1008 : 2 = 2015 \cdot 1008 - 1007 \cdot 1008 =$

$= 1008(2015 - 1007) = 1008 \cdot 1008 = 1008^2$

b) $2015 + a = 2015 + 2015^2 = 2015(1 + 2015) = 2015 \cdot 2016$

$4b = 4 \cdot 1008^2 = 2^2 \cdot 1008^2 = (2 \cdot 1008)^2 = 2016^2$

Deoarece $2015 \cdot 2016 < 2016^2 \Rightarrow 2015 + a < 4b$

2.

Observăm că 2a, 6c şi 50 sunt nr. pare $\Rightarrow$ b este par şi prim $\Rightarrow b = 2$.

Atunci avem $2a + 6c = 40$ / : 2 şi $\Rightarrow a + 3c = 20$.

Pentru $a = 2 \Rightarrow c = 6$ nu este prim;

Pentru $a = 3 \Rightarrow c \notin N$;

Pentru $a = 5 \Rightarrow c = 5$;

Pentru $a = 7 \Rightarrow c \notin N$;

Pentru $a = 11 \Rightarrow c = 3$;

Pentru $a = 13 \Rightarrow c \notin N$;

Pentru a = 17 $\Rightarrow$c = 1 nu este prim;

Pentru a > 19 şi prim $\Rightarrow$c $\notin$ N.

Deci numerele sunt :a=5, b=2şi c=5; a=11, b=2 şi c=3.

3.

Din condiţia (i) rezultă că elementele mulţimilor X şi Y se găsesc printre elementele mulţimii $\{1; 2; 3; 4\}$.

Din (ii) rezultă că $1 \in X$, $1 \in Y$, $2 \in X$, $2 \in Y$.

Din (ii) şi (iv) rezultă că $3 \notin Y$.

Datorită condiţiei (iii) avem şi $3 \notin X$(astfel din $3 \in X$ şi $3 \notin Y$ ar rezulta $3 \in X\text{-}Y$, ceea ce contravine condiţiei $X\text{-}Y \subset \{1,2,4\}$) .

Deci elementele 1 şi 2 fac parte din ambele mulţimi X şi Y, iar 3 nu aparţine nici lui X şi nici lui Y.

Din (v) avem $4 \notin X$ şi $4 \in Y$.

În concluzie $X = \{1;2\}$ şi $Y = \{1; 2; 4\}$

4.

Determinarea sumei iniţiale : $600 \cdot 5 = 3000$ (lei).

Determinarea lungimii efective a traseului : 2700 : 5 = 540 (km)

Determinarea sumei economisite prin renunţarea celor 6 elevi : 3000 – 2700 = 300 (lei)

Determinarea costului pentru un elev : 300 : 6 = 50(lei)

Determinarea numărului de elevi înscrişi iniţial : 3000 : 50 = 60(elevi)

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VI-a
Soluţii

1. *Aflaţi numărul natural* $\overline{xy}$ *dacă* $\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}}=\frac{4}{7}$.

Solu ie: $\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}}=\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{(10x+y)(1000+100+1)}{(10y+x)(1000+100+1)}=\frac{4}{7}\Rightarrow 70x+7y=40y+4x$

Deci 2x=y şi cum x,y cifre atunci $\overline{xy}$ *poate fi 12, 24, 36 sau 48.*

2. *Arătaţi că numărul* $N=1+7+7^2+\dots\dots+7^{2015}$ *este divizibil cu 200.*

Solu ie: *Grupând termenii câte 4 (pentru ca sunt 2016 la număr şi vom avea 504 seturi de 4) obţinem* $N=(1+7+7^2+7^3)+7^4(1+7+7^2+7^3)+\dots\dots 7^{2012}(1+7+7^2+7^3)=400\,(1+7^4+\dots 7^{2012})$ *de unde N este divizibil cu 200*

3. *Se consideră segmentul [AB] şi O mijlocul său. Pe o dreaptă d ce trece prin O (diferită de AB) se consideră de o parte şi de alta a lui O punctele M şi N astfel încât unghiurile* $\angle BMO$ *şi* $\angle ANO$ *sunt congruente. Arătaţi că MA=NB.*

Solu ie: *Comparăm triunghiurile ΔMOB şi ΔNOA conform cazului LUU şi obţinemMO=NO. Apoi comparând ΔMOA şi ΔNOB conform cazului LUL şi obţinemMA=NB.*

4. *Se consideră două unghiuri adiacente şi suplementare cu interioarele disjuncte. Bisectoarea celui mai mare dintre ele formează cu o latură a celuilalt un unghi de* 110^o. *Aflaţi măsurile celor două unghiuri.*

Solu ie: *Considerăm unghiurile XOY şi YOZ cu m(XOY)=a, m(YOZ)=b şi a>b. Dacă OM bisectoarea lui XOY atunci unghiul dat este MOZ (pentru că altă variantă ar fi MOY ceea ce ar implica m(XOY)=*220^o *– fals) Deci vom avea a+b=*180^o *şi (a/2)+b=110 de unde a/2=*70^o. *Deci măsurile unghiurilor sunt a=*140^o *şi b=*40^o.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VII-a
Soluţii

1. **a)** $\left(1 > \frac{1}{\sqrt{2015}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}, \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}\quad, \quad ... \quad, \quad \frac{1}{\sqrt{2015}} \geq \frac{1}{\sqrt{2015}}\right) \Rightarrow$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}}_{2015} \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \frac{2015}{\sqrt{2015}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \sqrt{2015}.$$

b) $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... + \frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... + \frac{\sqrt{2015}}{\sqrt{2015\cdot 2014}} - \frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2014}} - \frac{1}{\sqrt{2015}} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2015}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2015}-1}{\sqrt{2015}} \Leftrightarrow$$

$x\sqrt{2015} = \sqrt{2015} - 1.$

$1936 < 2015 < 2025 \Leftrightarrow \sqrt{1936} < \sqrt{2015} < \sqrt{2025} \Leftrightarrow 44 < \sqrt{2015} < 45\big|_{-1} \Leftrightarrow 43 < \sqrt{2015} - 1 < 44 \Rightarrow$

$\left[\sqrt{2015}-1\right] = 43 \Leftrightarrow \left[x\sqrt{2015}\right] = 43.$

2. a) $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2c^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2c^2}=c\sqrt{2}$. Presupunem că $c\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $c\sqrt{2} = r \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{r}{c}}_{\in\mathbb{Q}}$ Contradicţie!

Prin urmare, $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Dacă $a \not\vdots 5, b \not\vdots 5$, atunci $a^2, b^2 \in \{5k+1; 5k+4 / k \in \mathbb{N}\}$. Dacă a^2, b^2 au aceeaşi formă, *5k+1* sau *5k+4*, atunci a^2+b^2 ar fi egală cu *5q+2* sau *5q+3*, ceea ce contrazice egalitatea dintre a^2+b^2 şi un pătrat perfect (c^2). Dacă a^2, b^2 au forme diferite,

$a^2+b^2=5q \Rightarrow c^2=5q \Rightarrow c \vdots 5 \Leftrightarrow c^2=25p^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=25p^2 \Rightarrow$ Putem considera

$a^2 = 9p^2$ şi $b^2 = 16p^2$. Ţinând cont de faptul că $(a,b)=1$, obţinem p=1. Avem a=3, b=4 şi c=5.

Urmează că $\sqrt{a^2b^2+c^2} = \sqrt{9\cdot 16+25} = \sqrt{169} = 13 \in \mathbb{N}$.

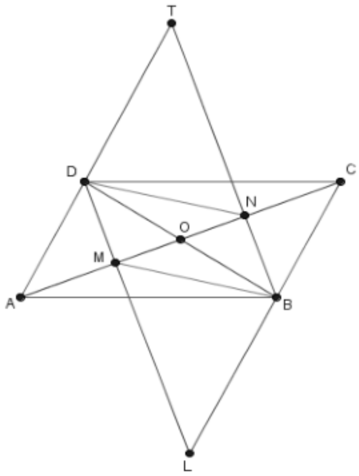
3. **a)** ABCD paralelogram $\Rightarrow \left.\begin{cases} AB \parallel CD \Rightarrow MAB \equiv NCD \\ (AB) \equiv (CD) \\ (AM) \equiv (NC) \end{cases}\right\} \overset{LUL}{\Rightarrow} \triangle MAB \equiv \triangle NCD \Rightarrow$

$(DN) \equiv (BM)$

b) Din ABCD paralelogram $\Rightarrow$

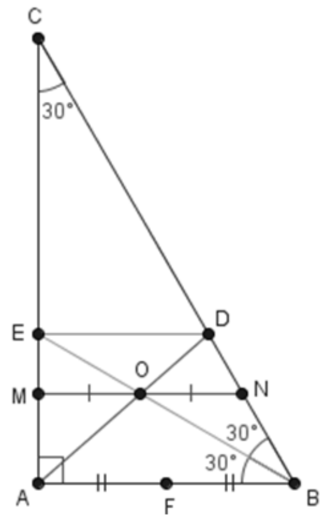
$\left.\begin{cases} AD \parallel CB \Rightarrow MAD \equiv NCB \\ (AD) \equiv (CB) \\ (AM) \equiv (NC) \end{cases}\right\} \overset{LUL}{\Rightarrow} \triangle MAD \equiv \triangle NCB$

$\Rightarrow (DM) \equiv (BN)$



$(DN) \equiv (BM)$ şi $(DM) \equiv (BN)$ $\Rightarrow DMBN$ paralelogram $\Rightarrow$ $DL \parallel BT$, dar $DT \parallel BL \Rightarrow DLBT$ paralelogram. Cum O este mijlocul lui (DB) (din paralelogramul $ABCD$) $\Rightarrow$ O este mijlocul lui $(LT) \Rightarrow$ L, O, T sunt coliniare.

4. $\left.\begin{matrix} m(\sphericalangle A) = 90^\circ \\ m(\sphericalangle C) = 30^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle B) = 60^\circ$



(BE-bisectoarea $\sphericalangle B \Rightarrow$ $m(\sphericalangle CBE) = m(\sphericalangle ABE) = 30^\circ$.

$\triangle CEB$ este isoscel (având unghiurile din B şi C de 30°) $\Rightarrow$ $(BE) \equiv (CE)$. În $\triangle AEB$, $m(\sphericalangle EAB) = 90^\circ, m(\sphericalangle ABE) = 30^\circ \Rightarrow$

$AE = \frac{BE}{2} = \frac{CE}{2} \Rightarrow AC = 3\cdot AE$. $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE \parallel AB$.

Prin O, ducem $MN \parallel AB, M \in AC, N \in BC$. Conform TFA, avem $\triangle EMO \sim \triangle EAB \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{MO}{AB}$ (1) şi din

$\triangle DNO \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{NO}{AB}$ (2).

Din $DE \parallel MN \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{DN}{DB}$ (3) Din rel. (1), (2) şi (3) $\Rightarrow (MO) \equiv (ON)$. În $\triangle CAB$, CF este mediană şi $MN \parallel AB \Rightarrow CF$ trece prin mijlocul lui (MN), adică prin O. Deci F, O, C sunt coliniare.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală-14.02.2015
Clasa a VIII-a

Bareme de corectare şi notare

Nr.crt.	Rezolvarea problemei	Punctaj
1. a	7(1-x)=2m	1p
	x=(7-2m):7	2p
b	$1 \le (7-2m):7<2$	1p
	$-3,5<m \le 0$	1p
	$m \in \{-3;-2;-1;0\}$	1p
	Cum m diferit de 0, obţinem $m \in \{-3;-2;-1\}$	1p
2. a	$(x+2y)^2 \ge 8xy$	1p
	$(x-2y)^2 \ge 0$	2p
	$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y} \ge \frac{4}{x+2y}$ şi celelalte două insumate, obţinem:	
	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{8}{3}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$	3p
	Egalitatea are loc dacă x=2y, y=2z, z=2x, de unde xyz=8xyz adică xyz=0	
	Cum x. y. z sunt strict pozitive, obţinem inegalitate strictă.	1p
3. a	$MA \perp (ABCD) \Rightarrow MA \perp BD$	1p
	$BD \perp AC$, $BD \perp MA \Rightarrow BD \perp (ACNM) \Rightarrow BD \perp MN$	2p
b	MA=5, MN=5, NB=$2(\sqrt{7}-1)$	1p
	Distanţa de la M la BN este înălţime în triunghiul isoscel BMN şi este	
	Egală cu $\sqrt{17+2\sqrt{7}}$	1p
	Dacă $BS \parallel AM$, BS=AM atunci $MS \perp (NBC)$	
	Distanţa de la M la planul (BCN) este egală cu AB, adică 3	2p
4.	$\Delta AFC \equiv \Delta CEA$(U.L.U)$\Rightarrow$	2p
	AF=EC, VE=VF $\Rightarrow EF \parallel AC$	1p
	Analog $ST \parallel BD$	1p
	$EF \parallel AC$, $ST \parallel BD \Rightarrow \sphericalangle EF,ST= \sphericalangle AC,BD$	2p
	Deci $m(\sphericalangle EF,ST)=90^0$	1p