OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a V-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1 Determinați numerele naturale care, adunate cu suma propriilor cifre, dau rezultatul 2015.

Autor: Prof.Mihaela Berindeanu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $x=\overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}+a+b+c \le 999+9+9+9$ Neacceptat Numărul căutat are 4 cifre	1p
Dacă $x=\overline{abcd} \Rightarrow \overline{abcd}+a+b+c+d=2015 \Rightarrow 1001a+101b+11c+2d=2015$	1p
$a>3$ Neacceptat pentru că $\overline{abcd}+a+b+c+d>2015$	1p
$a\in\{1,2\}$ $a=2 \Rightarrow 2002+101b+11c+2d=2015$ $101b+11c+2d=13 \Rightarrow b=0$ $11c+2d=13$ cu soluție unică $c=d=1$ Numărul căutat este 2011 și $2011+4=2015$	2p
$a=1 \Rightarrow 1001+101b+11c+2d=2015$ $101b+11c+2d=1014$ Pentru $b<9$ nu există soluție $b=9 \Rightarrow 11c+2d=105 \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ d=3 \end{cases}$ Numărul căutat este 1993 și $1993+22=2015$ Numerele care îndeplinesc cerințele problemei sunt deci 2011 și 1993.	2p

Enunț subiect 2 Se dau mulțimile de numere naturale $A=\{x-1;2x-3;3x+1;4x-1\}$ și $B=\{4x-2,3x+2,3x-6,2x-4\}$. Determinați x pentru care $A=B$.

Autor: GM-B 11/2014

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru ca mulțimile să fie egale trebuie să aibă aceleași elemente	1p
Se arată că singura variantă posibilă este $2x-3=3x-6$ ($2x-3$ este impar, prin urmare nu poate fi egal cu $2x-4$ sau $4x-2$ care sunt numere pare. $2x-3$ nu poate fi egal cu $3x+2$, acesta fiind mai mare)	3p
Din $2x-3=3x-6$ obținem $x=3$	2p
Pentru $x=3$ obținem $A=\{3,2,10,11\}=B$	1p

Soluție alternativă: suma elementelor mulțimii A= suma elementelor mulțimii B........

Enunț subiect 3: În figura de mai jos, sunt n pătrate, în fiecare pătrat fiind scrise numai puteri ale lui 2, după cum se observă:

1	2^1
2^2	2^3

2^4	2^5
2^6	2^7

2^8	2^9
2^{10}	2^{11}

....

a) Arătați că suma numerelor din oricare dintre cele n pătrate este multiplu de 5.
b) Demonstrați că produsul numerelor din oricare dintre cele n pătrate este pătrat perfect.
c) Aflați restul împărțirii la 1024 a sumei tuturor numerelor aflate în primele 2015 pătrate.

Autor: Prof.Ion Cicu, Prof. Cristian Olteanu, Prof.Traian Preda

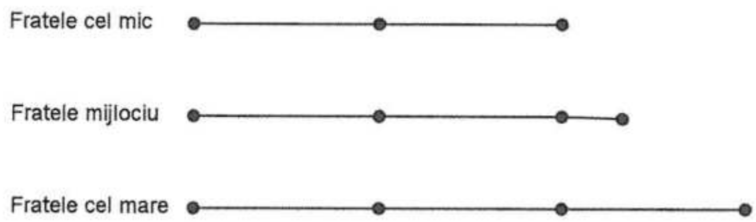
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)În fiecare pătrat avem numerele $2^n,2^{n+1},2^{n+2},2^{n+3}$ și atunci $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}=2^n\left(1+2+2^2+2^3\right)=2^n\cdot 15$ care este multiplu de 5. *Dacă face verificare pentru primele 3 pătrate se dă 1 p, care nu se cumulează cu cele 2p anterioare.*	2p
b)Avem $2^n\cdot 2^{n+1}\cdot 2^{n+2}\cdot 2^{n+3}=2^{4n+6}=\left(2^{2n+3}\right)^2$, adică este pătrat perfect. *Dacă face verificare pentru primele 3 pătrate se dă 1p, care nu se cumulează cu cele 2p anterioare*	2p
c) $1024=2^{10}$ și $1+2+2^2+...+2^9<2^{10}$	1p
$1+2+2^2+...+2^9+2^{10}+...+2^{8059}=(2^{10}-1)+2^{10}\left(1+...+2^{8049}\right)$	1p
Restul împărțirii este $2^{10}-1=1023$	1p

Enunț subiect 4 : Trei frați vor să-și cumpere împreună, din economiile lor, o tabletă în valoare de 2015 lei. Fratele cel mai mare contribuie cu o sumă de trei ori mai mare decât jumătatea sumei cu care contribuie cel mai mic dintre frați, iar fratele mijlociu contribuie cu o sumă cuprinsă între sumele celorlalți doi frați. Fiecare dintre sumele cu care contribuie cei trei frați sunt exprimate prin numere naturale de lei.

a) Aflați cea mai mică sumă de lei cu care contribuie fratele mijlociu.

b) Aflați numărul soluțiilor problemei și cea mai mare sumă cu care contribuie fratele mijlociu.

Autor: Prof. Victor Nicolae, Prof. Simion Petre



Detalii rezolvare	Barem asociat
a)Desenul și aflarea unui segment $2015:7=287$ rest 6.	2p
Așadar fratele mic contribuie cu $287\cdot 2=574$ lei, fratele mijlociu contribuie cu $574+6=580$ lei și este cea mai mică sumă cu care contribuie cel mijlociu, iar fratele cel mai mare contribuie cu $287\cdot 3=861$ lei.	1p
b)Valoarea cu care suma celui mijlociu depășește suma celui mai mic are forma 6+7k și jumătatea sumei celui mai mic are forma 287-k. Obținem inecuația $6+7k<287-k$	2p
Rezolvarea inecuației $k\in\{0;1;2;3;...;35\}$	1p
Finalizare 36 de soluții, Cea mai mare sumă cu care participă fratele mijlociu este $(287-35)\cdot 2+6+7\cdot 35=755$ lei.	1p

Soluție alternativă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1 Determinați numerele naturale $a,\ b,\ a<b$ și $c\in\mathbb{N}$ astfel încât
$\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=\frac{c+3}{c+1}$.
Autor: GM-B 1/2014

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$a^2+a=a(a+1)$. Un produs de două numere consecutive este multiplu de 2, prin urmare $\frac{a^2+a}{2}$ este număr natural. Analog, $\frac{b^2+b}{2}$ este număr natural. Deducem că $\frac{c+3}{c+1}$ este număr natural.	3p
Dar $\frac{c+3}{c+1}=1+\frac{2}{c+1}$, și atunci $c+1\in\{1,2\}$. Obținem $c=0$ sau $c=1$	2p
Pentru $c=0$ avem $\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=3$, de unde rezultă $a=0, b=2$	1p
Pentru $c=1$ avem $\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=2$, nu îndeplinește condițiile.	1p

Enunț subiect 2 Se consideră următoarele numere naturale:

$a=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29\cdot31$ și $b=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29$.

a) Demonstrați că numărul a este divizibil cu 2015.
b) Aflați cel mai mare număr natural n cu proprietatea că numărul a+b este divizibil cu 10^n.
c) Să se afle câți divizori care sunt pătrate perfecte are numărul a.
Autor :Prof. Traian Preda

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $5\cdot13\cdot31=2015 \Rightarrow 2015 \mid a$.	1p
b) $a+b= 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29\cdot32 = 5^4\cdot2^5\cdot x$ cu $(x,10)=1$	2p
$\Rightarrow 10^4 \mid a+b$, 10^5 nu divide $a+b \Rightarrow n=4$	1p
c) $a= 3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot.....\cdot23\cdot29\cdot31$ descompunerea lui a în factori primi	1p
orice divizor pătrat perfect al lui a este de forma $3^{2i}\cdot5^{2j}\cdot7^{2k}$ unde $i\in\{0,1,2,3,4\}$;$j\in\{0,1,2\}$ $k\in\{0,1\}$	1p
vom avea $5\cdot3\cdot2=30$ de pătrate perfecte.	1p

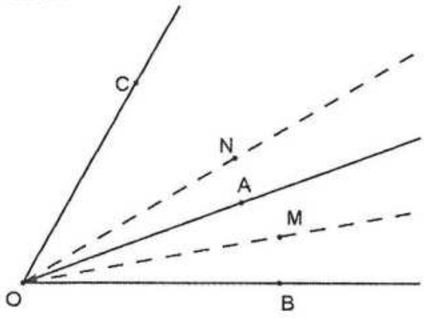
Enunț subiect 3: Se consideră mulțimea $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ divizibil cu 5 $\}$. Pentru o submulțime $B\subseteq A$ notăm cu m_B media aritmetică a elementelor sale. Să se determine submulțimile B de cardinal maxim știind că $m_B \in A$

Autor :Prof. Traian Preda

Detalii rezolvare	Barem asociat
$A=\{5\cdot2,5\cdot3,...5\cdot19\}\Rightarrow m_A = \dfrac{5\cdot189}{18} \notin A \Rightarrow$ card B ≤ 17. Arătăm card B=17.	2p
$B=A\setminus\{5\cdot x\}$, $x\in\{2,3,4...,19\} \Rightarrow m_B = \dfrac{5\cdot(189-x)}{17} \in A \Leftrightarrow 17\mid 189-x \Leftrightarrow 17\mid 19-x$ $\Leftrightarrow x\in\{2,19\}$	3p
$\Rightarrow B=A\setminus\{10\}$ sau $B=A\setminus\{95\}$.	2p

Enunț subiect 4: Fie unghiurile complementare $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOC$. Știind că măsura unghiului determinat de bisectoarele lor este egală cu 25^0, calculați măsurile celor două unghiuri.

Autor: ***



Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă unghiurile sunt adiacente, atunci unghiul dintre bisectoare are măsura de 45^0 . Prin urmare unghiurile nu pot fi complementare	3p
Presupunem $m(\measuredangle BOA) < m(\measuredangle BOC)$. Notând $m(\measuredangle BOA)=2a$ și $m(\measuredangle BOC)=2b$ avem $m(\measuredangle MON)=b-a$	2p
Avem $a+b=45^0$ și $b-a=25^0$, de unde $b=35^0$ și $a=10^0$ Rezultă $m(\measuredangle BOA)=20^0$ $m(\measuredangle BOC)=70^0$	2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015

CLASA a VII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1. Determinați numerele rationale x și y care verifică egalitatea :

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{(|2x+y|-5)\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}}{|3y-3|\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Subiectul 2. Fie $x\neq-1$, $y\neq-2$, $z\neq-3$ numere raționale astfel încât

$$\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014.$$

Calculați $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$

Subiectul 3. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Dacă D este mijlocul lui [BC], M este mijlocul lui [AD], E este simetricul lui B față de M și N aparține segmentului [BM] astfel încât $m(\sphericalangle ANC)=m(\sphericalangle DNM)=90^0$.
Arătați că patrulaterul AECD este dreptunghi.

Subiectul 4. Se consideră pătratul ABCD și punctele $M\in(BC)$; $O\in(BD)$; $N\in(CD$ astfel încât O este mijlocul segmentului MN. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului MAN.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015

CLASA a VIII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1. a) Arătați că $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ pentru orice număr x real, $x \geq 0$;

b) Determinați numerele reale și pozitive $x_1, x_2, ..., x_{2014}, x_{2015}$ care verifică egalitatea $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2015}^3 = 3(x_1 + x_2 + ... + x_{2015}) - 4030$

Subiectul 2. Determinați numerele prime $p > q$, știind că $p(1+3pq) + q(1-3pq) = p^3 - q^3$.

Subiectul 3. În cubul ABCDA\`B\`C\`D\` fie R, S, T mijloacele muchiilor [AB], [B\`C\`], si respectiv [DD\`].Dacă M, P, Q sunt mijloacele segmentelor [C\`R], [AS] și respectiv [BT], atunci:

a) Arătați că MQ este paralelă cu planul (DCC\`)

b) Determinați aria triunghiului MPQ, dacă AB= 4cm

Subiectul 4. Fie VABCD și SABCD două piramide patrulatere cu aceeași bază ABCD și vârfurile de o parte și de alta a planului (ABC). Pe cele 12 muchii și 6 vârfuri ale corpului obținut se înscriu numere naturale de la 1 la 18, câte unul în mijlocul fiecărei muchii și al fiecărui vârf.

Este posibil ca pe fiecare muchie a corpului nou obținut, numărul înscris în mijlocul muchiei să fie media aritmetică a numerelor înscrise în extremitățile muchiei respective?