OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Fie numerele naturale *a, b și c* unde ,

$a=\left(2\cdot7^{x-2}+5\cdot7^{x+1}-21\cdot7^{x}\right):7^{x}$,

$b=\left[3^{1+2+3+.....+30}+2\cdot\left(3^{15}\right)^{31}+6\cdot\left(3^{93}\right)^{5}\right]:3^{467}$,

iar c reprezintă ultima cifră a numărului 2^{2015}.

Să se arate că numărul natural $A=a+b^{2015}+c$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL 2

Se dă numărul $N=\overline{abcd}$ în baza zece, cu proprietatea că $5\cdot\overline{ab}=\overline{cd}$. Demonstrați că N se divide cu 7.

SUBIECTUL 3

Fie mulțimile $A=\{5x+3;36\}$ și $B=\{x^2;7y+5\}$, unde $x,y\in N$.

a) Determinați $x,y\in N$ pentru care mulțimile sunt egale;

b) Stabiliți dacă $A\cup B$ poate avea trei elemente.

SUBIECTUL 4

Un număr natural de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităţilor 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre şi se obţine restul 98. Calculaţi deîmpărțitul, împărțitorul și câtul.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1.

Determinaţi numerele prime a,b,c cu proprietatea : $27a+145b+15c=2015$.

SUBIECTUL 2.

a) Determinaţi numerele naturale $n\in\mathbb{N}^*$ și $\overline{abcd}$ scrise în baza 10, știind că $\overline{abcd}+\frac{\overline{abcd}}{6}+\frac{\overline{abcd}}{6^2}+...+\frac{\overline{abcd}}{6^n}=\frac{6^{n+1}-1}{5}$.

G.M. nr. 10/2014

b) Arătați că numărul $A=2016^{2015}+2014^{2015}$ are cel puțin 3 divizori numere prime.

SUBIECTUL 3.

O,A,B,C sunt puncte coliniare în această ordine, $OA=2^x$ cm, $OB=2^{x+1}$ cm, $OC=2^{x+2}$ cm, $x\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $BC=OA+AB$;

b) Dacă M este mijlocul segmentului $[OA]$ și N este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $MN=20$ cm, aflaţi lungimea segmentului $[AC]$.

SUBIECTUL 4.

Unghiurile $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}E$ sunt adiacente suplementare , $C,D\in Int(B\hat{O}E)$, $D\in Int(C\hat{O}E)$. Dacă unghiurile $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ și $D\hat{O}E$ sunt ascuțite, au măsurile exprimate prin numere naturale şi $m(A\hat{O}B)=\frac{2}{3}m(B\hat{O}C)=\frac{2}{15}m(C\hat{O}D)$, aflaţi măsurile unghiurilor $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ şi $D\hat{O}E$.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1.

Dacă x este numărul submulţimilor mulţimii $A = \{\overline{abc} \mid \sqrt{\overline{0,a(bc)} + \overline{0,b(ca)} + \overline{0,c(ab)}} \in$ N și a>b>c>0} şi

$y = (|3^{51} - 2^{85}| + 3^{2015} : 81^{491}) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8 - 5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}$

Calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

SUBIECTUL 2.

Se dă numărul $a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \cdots + \frac{2015}{10050} - (2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + 2010^{-1})$

a) Arătaţi că $a - 2$ este pătrat perfect

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a}{2n+1} \in \mathbb{Z}$

SUBIECTUL 3.

Fie ABC un triunghi isoscel cu m($\sphericalangle ABC$) $=108^0$, $[AB] \equiv [BC]$, BD este înălţimea dusă din B, $D \in [AC]$, iar $[AF]$ este bisectoarea unghiului A, $F \in [BC]$. Demonstraţi că $AF = 2 \cdot BD$.

O.J. Dolj, 1996

SUBIECTUL 4.

Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ şi N este simetricul lui M faţă de BC.

Dreapta NC intersectează paralela prin A la BC în T, iar TM intersectează BC în O şi pe AB în Q.

a) Demonstraţi că $ABCT$ este romb.

b) Arătaţi că $[BO]$ este linie mijlocie în triunghiul ATQ.

(**Gazeta matematică nr.1 - 2013**)

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1.

Fie expresia $E(x)=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9},\ x\in\mathbb{R}.$

a) Determinaţi cardinalul mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N} \mid E(\sqrt{n})=5\}$.

b) Fie $m\in\mathbb{R}$ valoarea minimă a expresiei $E(x)$. Determinaţi m şi mulţimea $B=\{x\in\mathbb{R} \mid E(x)=m\}$.

SUBIECTUL 2.

Determinaţi elementele mulţimii

$$S=\left\{(a,b,c,d)\ \middle|\ 2a+3b+5c+7d\le 174-\frac{8}{a}-\frac{27}{b}-\frac{125}{c}-\frac{343}{d},\ cu\ \ a,b,c,d\in(0,\infty)\right\}.$$

SUBIECTUL 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile $AB=3a,\ BC=2a$ şi $AA'=a,\ a>0.$ Fie $M\in(AB), N\in(BC)$ astfel încât $AM=BN=a.$

a) Demonstraţi că dreptele $D'M$ şi MN sunt perpendiculare.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre planele $(D'DM)$ şi $(D'DN)$.

SUBIECTUL 4.

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră și M, N, P, Q proiecțiile vârfului V pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{VAB}, \widehat{VBC}, \widehat{VCD}$, respectiv $\widehat{VDA}$. Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Clasa a V-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

$a = \left(2 \cdot 7^x \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^x \cdot 7 - 7^x\right) : 7^x = 7^x\left(98 + 35 - 21\right) : 7^x = 112$ **2p**

$b = \left(3^{\frac{30 \cdot 31}{2}} + 2 \cdot 3^{15 \cdot 31} + 6 \cdot 3^{93 \cdot 5}\right) : 3^{467} = \left(3^{465} + 2 \cdot 3^{465} + 6 \cdot 3^{465}\right) : 3^{467}$ **2p**

$= 3^{465}\left(1 + 2 + 6\right) : 3^{467} = 1$

$c = u\left(2^{2015}\right) = u\left(2^{4 \cdot 503 + 3}\right) = u\left(2^3\right) = 8$ **2p**

deci $A = 112 + 1^{2015} + 8 = 121 = 11^2$, deci A este pătrat perfect.....................................**1p**

Subiectul 2.

$N = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$..2p

$= 100\overline{ab} + 5\overline{ab} = 105\overline{ab}$..2p

$= 7 \cdot 15 \cdot \overline{ab} \Rightarrow$

N se divide cu 7...**3p**

Subiectul 3.

a) $u(5x + 3) \in \{3;8\}$ acesta nu poate fi pătrat perfect , rezultă că $x^2=36$,deci x=6......**2p**

$A = \{33,36\}$ şi atunci $7y+5=33$, de unde $y=4$...**2p**

b) Pentru ca $A \cup B$ să poată avea trei elemente trebuie ca $A \cap B$ să aibă un element, şi conform a) , rezultă că $x=6$ **1p**

se impune condiția $7y+5 \neq 33$ **1p**

deci, pentru orice y număr natural diferit de 4 , reuniunea are 3 elemente.................**1p**

Subiectul 4.

$\overline{aab5} = x \cdot q + 98,\ 0 \leq 98 < x$ **1p**

cum x are două cifre, rezultă că $x = 99$, deci $\overline{aab5} = 99 \cdot q + 98$.................................... **2p**

rezultă că ultima cifră a lui $99 \cdot q + 98$ este 5, deci ultima cifră a lui q este 3,

dar $1105 \leq \overline{aab5} \leq 9995 \Leftrightarrow 1105 \leq 99 \cdot q + 98 \leq 9995$, de unde se obţine că $11 \leq q \leq 99$ şi, cum ultima cifră a lui q este 3, urmează că $q \in \{13, 23, 33, \ldots, 93\}$..............................**2p**

deci, deîmpărţitul este egal cu 3365, împărţitorul este egal cu 99 şi câtul este egal cu 33.....**2p**

Notă : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.

Clasa a VI-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

$5|145b$, $5|15c$, $5|2015$ $\Rightarrow 5|27a$, $5\nmid 27 \Rightarrow 5|a$, a prim $\Rightarrow a=5$ …………...……......... **2p**

$29b+3c=376 \Rightarrow b<13$, b prim $\Rightarrow b\in\{2,3,5,7,11\}$ ………..……………………..………. **2p**

Verificarea că pentru $b\in\{2,3,5,7\}$ nu se obţin soluţii convenabile ……..……………….……. **2p**

$b=11 \Rightarrow c=19$. Soluţie finală: $a=5$, $b=11$, $c=19$ **1p**

Subiectul 2.

a) $\overline{abcd}+\frac{\overline{abcd}}{6}+\frac{\overline{abcd}}{6^2}+...+\frac{\overline{abcd}}{6^n}=\overline{abcd}\cdot\left(1+\frac{1}{6}++\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{6^n}\right)$ ……..…….............**1p**

$1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{6^n}=\frac{6^{n+1}-1}{5\cdot 6^n}$ ………………………………………………..…......…......**1p**

$\frac{\overline{abcd}}{6^n}=1 \Rightarrow \overline{abcd}=6^n$ …………………………………………………………………**1p**

$n\in\{4;5\}$, $\overline{abcd}\in\{1296;7776\}$ ……………………………………..……….…......…**1p**

b) $2016^{2015}=(2015+1)^{2015}=M_{2015}+1^{2015}=M_{2015}+1$

$2014^{2015}=(2015-1)^{2015}=M_{2015}-1^{2015}=M_{2015}-1$ ……………………………….........**1p**

$A=M_{2015}+1+M_{2015}-1=M_{2015}=2015\cdot k$, $k\in\mathbb{N}^*$……………………………….…**1p**

$2015=5\cdot13\cdot31 \Rightarrow A=5\cdot13\cdot31\cdot k$, $k\in\mathbb{N}^*$, deci A are cel puţin 3 divizori numere prime.**1p**

Subiectul 3.

a) $OA+AB=OB=2^{x+1}$ (sau $OB=2\cdot OA$, $OC=4\cdot OA$) **1p**

$BC=OC-OB=2^{x+2}-2^{x+1}=2^{x+1}=OA+AB$ ($BC=OB=OA+AB$) **1p**

a) $MN=2^{x+1}+2^{x-1}$ (sau $MN=\frac{5}{2}\cdot OA$) **2p**

$x=3$ cm **2p**

$AC=24$ cm **1p**

Subiectul 4.

Notăm $m(\hat{AOB})=x$, $m(\hat{DOE})=y \Rightarrow x+\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}x+y=180^0$ .... **2 p**

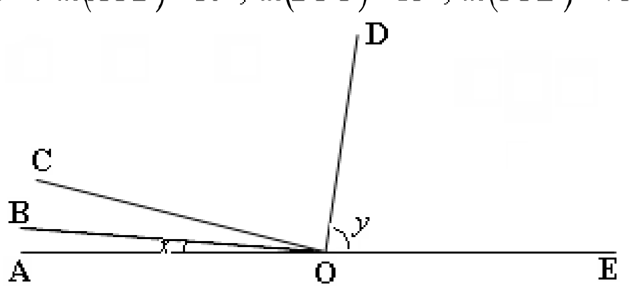
$\frac{15}{2}x<90^0 \Rightarrow x<12^0$ *(1)*..**1 p**

$y=180^0-10x<90^0 \Rightarrow x>9^0$ *(2)*... **2 p**

$(1)+(2) \Rightarrow m(\hat{AOB})\in\{10^0;11^0\}$, $m(\hat{BOC})\in\{15^0;16^030'\}$, $m(\hat{COD})\in\{75^0;82^030'\}$, $m(\hat{DOE})\in\{80^0;70^0\}$

....**1 p**

Măsurile sunt numere naturale $\Rightarrow m(\hat{AOB})=10^0$, $m(\hat{BOC})=15^0$, $m(\hat{COD})=75^0$, $m(\hat{DOE})=80^0$ ... **1 p**



Notă : **Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .**

Clasa a VII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

$\sqrt{\frac{\overline{abc}-a+\overline{bca}-b+\overline{cab}-c}{990}} = \sqrt{\frac{110a+110b+110c}{990}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{9}} \in \mathbb{N}$ deci $a+b+c=9$. …………………………….. **2p**

Cum $a > b > c > 0$ rezultă $A = \{621; 531; 432\}$, deci $x = 2^{cardA} = 2^3 = 8$ …………………………… **1p**

Ţinând seama că $3^{51} = (3^3)^{17} = 27^{17}; 2^{85} = (2^5)^{17} = 32^{17} \Rightarrow 3^{51} < 2^{85} \Rightarrow$

$y = (2^{85} - 3^{51} + 3^{2015} : 3^{4\cdot 491}) : (-2^{82}) + 36 + 5\sqrt{3} - 8 - 5\sqrt{3} + 16 = 36$ ……………………....... **3p**

$m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{8 \cdot 36} = 12\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………... **1p**

Subiectul 2.

a) $2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + 2010^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2010}$ ……………………………………..….**1p**

$\frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \cdots + \frac{2015}{10050} = \frac{1}{5} + \frac{5+2}{2\cdot 5} + \frac{5+3}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{5+2010}{2010\cdot 5}$……………………..……..….**2p**

$a = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2010} = \frac{1}{5} \cdot 2010 = 402$ ……..…. **1p**

$a - 2 = 400 = 20^2 =$pătrat perfect ……………………………………………..…. **1p**

b) $\frac{402}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2n+1) \in D_{402}$………………………………………………………………..**1p**

$n \in \{0; 1; 33; 100\}$ ……………………………………………………………………. **1p**

Subiectul 3.

ΔABC: $[AB] \equiv [BC] \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ şi cum $m(\sphericalangle ABC) = 108^0 \Rightarrow m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 36^0$ **1p**

$m(\sphericalangle BAF) = m(\sphericalangle FAC) = 18^0$; $m(\sphericalangle AFB) = 54^0$...**1p**

$m(\sphericalangle DBC) = 54^0 \Rightarrow \Delta BOF$ este isoscel, unde $\{O\} = (BD \cap AF$, $\Rightarrow [OB] \equiv [OF]$……………………………….......**1p**

Fie punctul E simetricul punctului B faţă de punctul $D \Rightarrow m(\sphericalangle AED) = 54^0$ **2p**

dar $m(\sphericalangle OAE) = 54^0 \Rightarrow \Delta OAE$ este isoscel $\Rightarrow [AO] \equiv [OE] \Rightarrow AO + OF = OE + OB$..**1p**

$\Rightarrow AF = BE$, $BE = 2 \cdot BD \Rightarrow AF = 2 \cdot BD$...**1p**.

Subiectul 4.

a) $ABCT$ = paralelogram **2p**

cu $AB \equiv BC \Rightarrow ABCT$ = romb.. **1p**

b) Notăm: $AP = PM = MC = \frac{AC}{3}$. Se arată că $BMTP$ = romb...**2p**

$\Rightarrow BP \parallel TM \Rightarrow BP \parallel MO$. Dar M mijlocul lui [PC]$\Rightarrow MO$ = linie mijlocie în triunghiul BCP **1p**

$\Rightarrow$ O mijlocul lui BC. Deci $BO = \frac{BC}{2} = \frac{AT}{2}$ şi $BO \parallel AT \Rightarrow [BO]$ = linie mijlocie.......................**1p**

Notă : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .

Barem de corectare și notare **Clasa a VIII-a**

Subiectul 1.

a) Avem $E(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-3|$. ……………………………..……..........**1p**

$E(\sqrt{n})=5 \Leftrightarrow |\underbrace{\sqrt{n}+2}_{>0}|+|\sqrt{n}-3|=5 \Leftrightarrow |\sqrt{n}-3|=3-\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}\le 3 \Leftrightarrow n\le 9$. ……………..**2p**

Dar $n\in\mathbf{N}$ şi deci $A=\{0,1,2,...,9\} \Rightarrow \text{Card}(A)=10$. …………………………………........…...**1p**

b) Avem $E(x)=|x+2|+|x-3|=|x+2|+|3-x|\ge|x+2+3-x|=5, \forall x\in\mathbf{R}$. (1) ………….......**1p**

Cum $E(0)=5$ şi $E(x)\ge 5, \forall x\in\mathbf{R}$, valoarea minimă a expresiei $E(x)$ este $m=5$. ……........**1p**

În inegalitatea (1) avem egalitate $E(x)=5 \Leftrightarrow (x+2)(3-x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-2;3]$.

Deci, $B=\{x\in\mathbf{R} \mid E(x)=5\} \Leftrightarrow B=[-2;3]$. ……………………………………………………....**1p**

Subiectul 2.

$2a+3b+5c+7d\le 174-\frac{8}{a}-\frac{27}{b}-\frac{125}{c}-\frac{343}{d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)\le 174$ (1). ....…….……..................**1p**

Avand in vedere ca $a,b,c,d\in(0,\infty)$, aplicand inegalitatea mediilor obtinem:

$2a+\frac{8}{a}\ge 2\sqrt{2a\cdot\frac{8}{a}}$=8, cu egalitate pentru cazul când $2a=\frac{8}{a}$, $a^2=4, a=2$ ….....................**1p**

$3b+\frac{27}{b}\ge 2\sqrt{3b\cdot\frac{27}{b}}$=18, cu egalitate pentru cazul când $3b=\frac{27}{b}$, $b^2=9, b=3$…..............**1p**

$5c+\frac{125}{c}\ge 2\sqrt{5c\cdot\frac{125}{c}}$=50, cu egalitate pentru cazul când $5c=\frac{125}{c}$, $c^2=25, c=5$…........**1p**

$7d+\frac{343}{d}\ge 2\sqrt{7d\cdot\frac{343}{d}}$=98, cu egalitate pentru cazul când $7d=\frac{343}{d}$, $d^2=49, d=7$ …....**1p**

Prin însumare găsim că:

$\left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)\ge 8+18+50+98=174$ (2). **1p**

Din (1) și (2) rezultă $\left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)=174$, iar egalitatea se realizează pentru $(a,b,c,d)=(2,3,5,7)$ ....……………...**1p**

Subiectul 3.

a) Cu teorema lui Pitagora, avem $DM=MN=a\sqrt{5}, DN=a\sqrt{10}$. Conform RTP obţinem că ΔDMN este dreptunghic isoscel, cu $m(\sphericalangle DMN)=90^\circ$ (1) $\Rightarrow DM\perp MN$. ………………...........................**2p**

Cu teorema celor trei perpendiculare, avem:

$D'D\perp(ABC), DM\perp MN, DM\subset(ABC), MN\subset(ABC)\Rightarrow D'M\perp MN$. …….………...**2p**

b) Avem $D'D\perp(ABC), DM\subset(ABC), DN\subset(ABC)\Rightarrow D'D\perp DM, D'D\perp DN$. Obţinem apoi că $(D'DM)\cap(D'DN)=D'D$, $MD\perp D'D, MD\subset(D'DM), ND\perp D'D, ND\subset(D'DN)\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle((D'DM),(D'DN)))=m(\sphericalangle(MD,ND))=m(\sphericalangle MDN)$. ………………..………...**2p**

Dar conform (1), ΔDMN este dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle DMN)=90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle MDN)=45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle((D'DM),(D'DN)))=45^\circ$. ……………………………………………...………….......**1p**

Subiectul 4.

În triunghiul VAB notăm AA_1 bisectoarea unghiului $V\hat{A}B$, $A_1\in(VB)$ și $\{V_1\}=AB\cap VM$.

În triunghiul VAV_1 avem AM bisectoare și înălțime, deci triunghiul este isoscel, de unde rezultă că M este mijlocul lui $[VV_1]$. ………...……...**1p**

Analog se arată că N este mijlocul lui $[VV_2]$, P este mijlocul lui $[VV_3]$, Q este mijlocul lui $[VV_4]$, unde $\{V_2\}=BC\cap VN, \{V_3\}=CD\cap VP, \{V_4\}=DA\cap VQ$. ……………..……......................................**1p**

În triunghiul VV_1V_2, $[MN]$ este linie mijlocie, deci $MN \parallel V_1V_2$ și cum $V_1V_2\subset(ABC)$, rezultă $MN\parallel(ABC)$ (1). **1p**

Analog rezultă $NP\parallel(ABC)$ (2) și $PQ\parallel(ABC)$ (3). ……………..……...**1p**

Din (1) și (2) rezultă $(MNP)\parallel(ABC)$ (4), iar din (2) și (3) rezultă $(NPQ)\parallel(ABC)$ (5) **1p**

Din (4) și (5) rezultă că planele (MNP) și (NPQ) sunt paralele sau coincid. **1p**

Dar cum $(MNP)\cap(NPQ)=NP$, rezultă că planele coincid, deci punctele M, N, P, Q sunt coplanare. **1p**