OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Numerele naturale m şi n au proprietatea că $(2^m + 7^n)$ se divide cu 5. Arătaţi că numărul $(2^n + 7^m)$ se divide cu 5.

2. Determinați mulțimea:

$$M = \left\{\overline{abc} \middle| a \cdot \overline{bc} \text{ și } b \cdot \overline{ac} \text{ sunt numere consecutive}\right\}.$$

3. Se consideră numărul:

$$A = 1 + 2015 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}.$$

a) Arătați că numărul $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2$ este cub perfect.
c) Arătați că A este pătrat perfect și cub perfect.

4. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică relaţia: $a^4 + 5a + 1 = 5^b$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu)*
- *Timp de lucru: 2 ore*

Soluţii clasa a V-a:

1. Notăm: $A = 2^m + 7^n$, $B = 2^n + 7^m$.

Dacă un număr p se divide cu 5, atunci ultima sa cifră $u(p)$ va fi 0 sau 5.

Arătăm că dacă

$u(2^m + 7^n) \in \{0, 5\}$, atunci și $u(2^n + 7^m) \in \{0, 5\}$.

Cazul I $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^*)$

Dar $u(2^k) = \{2, 4, 6,8\}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$, iar $u(7^k) = \{1, 3, 7, 9\}, \forall k \in \mathbb{N}$. Ultima cifră $u(n)$:

k	$u(2^k)$	$u(7^k)$
$M4$	6	1
$M4$+1	2	7
$M4$+2	4	9
$M4$+3	8	3

Din condiția $u(2^m + 7^n) \in \{0, 5\}$, cu $m \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (2^m + 7^n)$ impar , deci $u(2^m + 7^n) = 5$.

Cazurile convenabile:

1. (6+9) pentru ($m = M4, n = M4 + 2$);
2. (2+3) pentru ($m = M4 + 1, n = M4 + 3$);
3. (4+1) pentru ($m = M4 + 2, n = M4$);
4. (8+7) pentru ($m = M4 + 3, n = M4 + 1$).

În toate aceste cazuri ultima cifră a numărului B este $u(2^n + 7^m) = 5$.

Cazul II $(\boldsymbol{m = 0})$

Pentru $m = 0$, exercițiul se mai scrie:

Dacă $A = 1 + 7^n$ se divide cu 5, atunci $B = 2^n + 1$ se divide cu 5.

Din $(1 + 7^n) \vdots 5 \Longrightarrow n = M4 + 2$, iar ($2^{M4+2} + 1$)$\vdots$ 5, adică concluzia în cazul $m = 0$.

2. I. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$, de unde obținem $c \cdot (a - b) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru $c = 1, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $a = b + 1$.

II. Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$, de unde obținem $c \cdot (b - a) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru $c = 1, a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $b = a + 1$. În concluzie:

$M = \{121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891, 211, 321, 431, 541, 651, 761, 871, 981\}$.

3.a) $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 = 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015 \cdot (1 + 2014) = 2015^2$.

b) $b = 1 + 2014 + 2015 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2 \Rightarrow b = 2015^2 + 2014 \cdot 2015^2 = 2015^2 \cdot (1 + 2014)$.

Adică $b = 2015^3$.

c) $A = 2016 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^2 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^2(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^3 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

....

$A = 2016^{2015} + 2015 \cdot 2016^{2015} = 2016^{2015}(1 + 2015) = 2016^{2016}$,

$2016 = 3 \cdot 372, 2016 = 2 \cdot 1008$; $A = \left(2016^{672}\right)^3$, $A = \left(2016^{1008}\right)^2$, deci A este pătrat perfect și cub perfect.

4. Relaţia este echivalentă cu: $a^4 + 5a = 5^b - 1$.

Notăm u(n)=ultima cifră a numărului n.

Atunci u(n^2)$\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.Rezultă u(n^4)$\in \{0, 1, 5, 6\}$.

Deci u($a^4 + 5a$)$\in \{0, 1, 5, 6\}$. Dar u($5^b - 1$)$\in \{0, 4\}$. Egalitatea are loc numai dacă $b = 0$.

În acest caz relaţia devine $a^4 + 5a = 0$, a cărei singură soluţie naturală este $a = 0$.

Deci, singura soluţie este $a = b = 0$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale nenule a, b, c, x, y, z astfel încât $bcx + acy - abz = 0$ și $(a,b)=1,(b,c)=1,(c,a)=1$. Arătați că $a^2b^2c^2$ divide $(x^2+a^2)\cdot(y^2+b^2)\cdot(z^2+c^2)$.

2. Numerele $x+y,\ y+z,\ z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 8.

a) Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

b) Dacă $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}, a \neq b \neq c \neq a$, să se determine valorile maxime și minime ale raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.

3. Fie unghiul $\measuredangle XOY$ și numerele naturale distincte a, b. Pe $(OX$ considerăm în ordine punctele $A_1, A_2, A_3, \dots$ astfel încât $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = a$. Pe $(OY$ considerăm în ordine punctele $B_1, B_2, B_3, \dots$ astfel încât $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = b$.

a) Arătați că există $A \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots\}$ și $B \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, \dots\}$ astfel încât triunghiul OAB este isoscel.

b) Arătați că există $A, C \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots\}$ și $B, D \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, \dots\}$ astfel încât $\Delta OAD \equiv \Delta OBC$.

4. Pe dreapta d, se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F în această ordine, astfel încât $AB = 2OA$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[BD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ şi E este mijlocul lui $[BF]$.
Să se arate că:

a) segmentele ($[AE], [CD]$), respectiv ($[AD], [BC]$) au acelaşi mijloc;

b) $\frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} > \frac{CF}{OE}$.

Notă

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu).*
- *Timp de lucru: 2 ore*

Soluţii clasa a VI-a:

1. Din $bcx = a\cdot(bz-cy)$ rezultă a / bcx și cum $(a,b)=1,(a,c)=1$ obținem $a / x \Leftrightarrow x = a\cdot a_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Din $acy = b\cdot(az-cx)$ rezultă b / acy și cum $(a,b)=1,(b,c)=1$ obținem $b / y \Leftrightarrow y = b\cdot b_1, b_1 \in \mathbb{N}^*$.

Din $abz = c\cdot(bx+ay)$ rezultă c / abz și cum $(a,c)=1,(b,c)=1$ obținem $c / z \Leftrightarrow z = c\cdot c_1, c_1 \in \mathbb{N}^*$.

Avem: $(x^2+a^2)\cdot(y^2+b^2)\cdot(z^2+c^2) = (a^2a_1^{\,2}+a^2)\cdot(b^2b_1^{\,2}+b^2)\cdot(c^2c_1^{\,2}+c^2) =$
$= a^2b^2c^2\cdot(a_1^{\,2}+1)\cdot(b_1^{\,2}+1)\cdot(c_1^{\,2}+1)$ care se divide prin $a^2b^2c^2$.

2. a) Avem $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k$, de unde rezultă că:
$x+y=4k$, $y+z=6k$ și $z+x=8k$, iar prin adunare membru cu membru a celor trei egalități obținem:

$2x+2y+2z=18k$, deci $x+y+z=9k$.
Dacă $x+y+z=9k$ și $x+y=4k$, rezultă că $z=5k$.
Dacă $x+y+z=9k$ și $y+z=6k$, rezultă că $x=3k$.
Dacă $x+y+z=9k$ și $z+x=8k$, rezultă că $y=k$.
Se obține: $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2} = \frac{23}{35}$.

b) Valoarea maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când $b=9, c=8, a=7$ (deoarece $xz > yz > xy$) și este $\frac{7\cdot 3k^2+9\cdot 15k^2+8\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$.

Valoarea minimă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când $b=1, c=2, a=3$ (deoarece $xz > yz > xy$) și este $\frac{3\cdot 3k^2+1\cdot 15k^2+2\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{34}{35}$.

3. a) Căutăm $A \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\}$ și $B \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, ...\}$, astfel încât $OA = OB \Leftrightarrow OA_i = OB_k \Leftrightarrow i\cdot a = k\cdot b$. Luăm $i=b$ și $k=a$. Rezultă $OA = OB = a\cdot b$.

b) Cu A și B fixate ca la a), e suficient să luăm de exemplu $C \in (OX$, astfel încât $OC = 2\cdot OA$ și $D \in (OY$, astfel încât $OD = 2\cdot OB$. Rezultă $\Delta OAD \equiv \Delta OBC\,(L.U.L)$.

4. Se notează cu $OA = a$.

- Din $AB = 2OA$ se obține $AB = 2a$, $OB = OA + AB = 3a$;
- B este mijlocul lui $[AC] \Rightarrow OC = 5a$;
- C este mijlocul lui $[BD] \Rightarrow OD = 7a$;
- D este mijlocul lui $[BE] \Rightarrow OE = 11a$;
- E este mijlocul lui $[BF] \Rightarrow OF = 19a$.

a) 1. Segmentele ($[AE], [CD]$) au acelaşi mijloc dacă $AC = DE \Leftrightarrow$
$AC = OC - OA = 4a$; $DE = OE - OD = 4a$ Deci ($[AE], [CD]$) au acelaşi mijloc.

2. Segmentele ($[AD], [BC]$) au acelaşi mijloc dacă $AB = CD \Leftrightarrow$
$AB = OB - OA = 2a$ $\quad CD = OD - OC$ Deci ($[AD], [BC]$) au acelaşi mijloc.

b) $\frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} > \frac{CF}{OE} \Leftrightarrow \frac{OC-OA}{OE-OB} + \frac{OB-OA}{OD-OA} + \frac{OC-OB}{OF-OE} + \frac{OA}{OE-OD} > \frac{OF-OC}{OE} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5a-a}{11a-3a} + \frac{3a-a}{7a-a} + \frac{5a-3a}{19a-11a} + \frac{a}{11a-7a} > \frac{19a-5a}{11a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a}{8a} + \frac{2a}{6a} + \frac{2a}{8a} + \frac{a}{4a} > \frac{14a}{11a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{14}{11} \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \frac{14}{11} \Leftrightarrow 44 > 42.$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{101}+9\right).$$

2. Se consideră $x_1, x_2, \dots, x_{2015} \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2015} = 2$. Se notează cu:
$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015}$, iar cu
$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(x_{2015} + \frac{1}{x_1}\right)$.

a) Să se arate că S este un număr întreg divizibil cu 2 sau cu 4.
b) Calculați produsul P.

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N situate pe latura (CD), respectiv (AB). Demonstrați că: $\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CND} = \mathcal{A}_{ABCD}$.

4. Fie pătratul $ABCD$. Pe latura AB se construiește în exterior triunghiul echilateral ABE. Perpendiculara din A pe dreapta DE intersectează perpendiculara din B pe dreapta CE în punctul F. Arătați că patrulaterul $BEFC$ este romb.

Notă
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu).*
- *Timp de lucru: 3 ore*

Soluţii clasa a VII-a:

1. Se folosește formula radicalilor dubli:

$$\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}=\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{\frac{k-1}{2}}=\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}},\ k=\overline{1,n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}\right)}{2}.$$

$$S=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}+\right)+\left(\sqrt{n+1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{n-1}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1\right).$$

Dar $S=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{101}+9\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1\right)=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{101}+9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{101}+10\Longrightarrow n=100.$$

2. Din $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{2015}=2$ și $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{2015}\in\mathbb{Z}$ se deduce faptul că un număr, fie acesta $x_{2015}=\pm2$, iar celelalte numere sunt 1 sau (-1). În total sunt 2014 numere care iau valorile 1, respectiv (-1).

a) Cazul I, $x_{2015}=2$

Numerele 1, respectiv (-1) sunt în număr par. Se notează cu
$m\ (m=2k,k=\overline{0,1007})$ totalul numerelor de 1 din șir, iar cu
$n\ (n=2p,p=\overline{0,1007})$ totalul numerelor de (-1) din șir, $m+n=2014$.
Atunci:
$S=m\cdot1+n\cdot(-1)+2=2014-2\cdot n+2=(2016-4p)\ \vdots\ 4.$

Cazul II, $x_{2015}=-2$

Numerul 1, respective (-1) sunt în număr impar. Se notează cu:
$m\ (m=2k+1,k=\overline{0,1006})$ totalul numerelor de 1 din șir, iar cu
$n\ (n=2p+1,k=\overline{0,1006})$ totalul numerelor de (-1) din șir, $m+n=2014$.
$(k+p=1006)$. Atunci:

$$S=m\cdot1+n\cdot(-1)+2=2014-2\cdot n-2=$$
$$=2012-2(2p+1)=(2010-4p)\ \vdots\ 2.$$

b) Cazul I, $x_{2015}=2$

1. Dacă toate numerele sunt 1, atunci:

$$P=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_{2014}+\frac{1}{x_{2015}}\right)\cdot\left(x_{2015}+\frac{1}{x_1}\right)=$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{de\ 2013\ ori} \cdot (1 + \tfrac{1}{2}) \cdot (2+1) = 9 \cdot 2^{2012};$$

2. Dacă toate numerele sunt (-1), atunci:

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_{2014} + \frac{1}{x_{2015}}\right) \cdot \left(x_{2015} + \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-2)}_{de\ 2013\ ori} \left(-1 + \tfrac{1}{2}\right) \cdot (2-1) = -2^{2013}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2^{2012}.$$

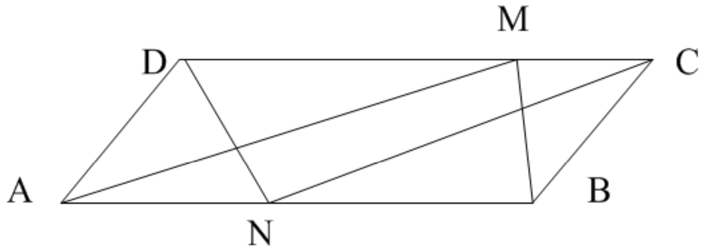
3. Dacă în șir sunt și numere de 1, și numere de (-1), atunci paranteza formată dintr-un 1 și un (-1) este 0, deci produsul va fi 0.

Cazul II, $x_{2015} = -2$

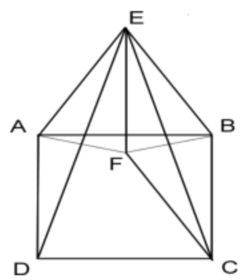
Numele 1, respective (-1) sunt în număr impar, deci cel puțin o paranteză este zero, adică este de forma: (1-1) sau (-1+1). În acest caz $P = 0$.

3. Deoarece $AB = DC$, iar $d(D, AB) = d(M, AB) = d(N, CD)$,

$$\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CND} = \frac{AB \cdot d(M,AB)}{2} + \frac{CD \cdot d(N,CD)}{2} = 2 \cdot \frac{AB \cdot d(M,AB)}{2} =$$
$$= AB \cdot d(M, AB) = \mathcal{A}_{ABCD}.$$



4. $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{ABE}) \Rightarrow m(\widehat{EBC}) = 90° + 60° = 150°$.
Dar $\triangle EBC$ isoscel ($(BE) \equiv (BC)$) și BF este înălțime în $\triangle EBC \Rightarrow$ (BF bisectoarea $\sphericalangle EBC \Rightarrow m(\widehat{EBF}) = 75° \Rightarrow m(\widehat{ABF}) = 75° - 60° = 15°$.
Analog $m(\widehat{FAB}) = 15° \Rightarrow \triangle FAB$ isoscel $\Rightarrow (FA) \equiv (FB)$. Dar $(EA) \equiv (EB)$
$\Rightarrow EF$ mediatoarea segmentului [AB].
$\Rightarrow EF \perp AB$. Dar $CB \perp AB \Rightarrow EF \parallel BC$ (1).
Dar $\triangle EAB$ echilateral $\Rightarrow$ (EF este bisectoarea $\sphericalangle AEB \Rightarrow m(\widehat{FEB}) = 30°$, dar $m(\widehat{BEC}) = 15° \Rightarrow m(\widehat{FEC}) = 15° \Rightarrow \triangle EFB$ isoscel deoarece (EC bisectoare și înălțime. $\Rightarrow (EF) \equiv (EB)$. Dar $(EB) \equiv (BC) \Rightarrow (EF) \equiv (BC)$ (2). Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow BEFC$ paralelogram. Dar $(BE) \equiv (BC) \Rightarrow BEFC$ romb.



OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a,b,c \in R$. Demonstraţi că

$$\left(a+b-c\right)^2+\left(a-b+c\right)^2+\left(-a+b+c\right)^2+\left(a+b+c\right)^2=4\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

b) Să se demonstreze că numărul $A=22^{22}+44^{44}+66^{66}$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale nenule pătrate perfecte.

2. Determinaţi mulţimea $I=\left(-\infty;a\right]\cap\left[a^{-1};\infty\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

3. Fie M un punct exterior planului trapezului $ABCD$ ($AD \parallel BC$), iar E, F proiecţiile lui pe dreptele AD, respectiv BC.

a) Demonstraţi că $(MEF) \perp (ABC)$;

b) Dacă distanţele de la M la bazele trapezului sunt de $6\sqrt{3}\,cm$, iar măsura diedrului format de planele (MAD) și (MBC) este de 60^0, calculaţi distanţa de la M la planul (ABD).

4. Se consideră cubul ABCDMNPQ cu lungimea muchiei egală cu 5. Planul (ANQ) intersectează planele (MBC), (MCD), (MDB) după dreptele d_1, d_2, respectiv d_3.

a) Arătaţi că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Demonstraţi că aria triunghiului format de cele trei drepte este mai mică decât 2.

Notă

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu).*
- *Timp de lucru: 3 ore*

Soluţii clasa a VIII-a:

1. a) Prin calcul avem:

$$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\right)+$$
$$+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)=$$
$$=4\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

b)

$$A=22^{22}+44^{44}+66^{66}=4\left(2^{20}\cdot 11^{22}+2^{86}\cdot 11^{44}+2^{64}\cdot 33^{66}\right)=4\left[\left(2^{10}\cdot 11^{11}\right)^2+\left(2^{43}\cdot 11^{22}\right)^2+\left(2^{32}\cdot 33^{33}\right)^2\right]=$$
$$=(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2$$

unde $a=2^{10}\cdot 11^{11}, b=2^{43}\cdot 11^{22}, c=2^{32}\cdot 33^{33}$.

2. Condiția de existență: $a\neq 0$;

$a=a^{-1}\Rightarrow a=\pm 1$.

Cazul I

Dacă $a\in(-\infty;-1)\Rightarrow I=(-\infty;-1)\cap(-1;\infty)\Rightarrow I=\emptyset$;

Cazul II

Dacă $a\in(-1;0)\Rightarrow I=(-\infty;a]\cap\left[a^{-1};\infty\right)=\left[a^{-1};a\right]$;

Cazul III

Dacă $a\in(0;1)\Rightarrow I=\emptyset$;

Cazul IV

Dacă $a\in(1;\infty)\Rightarrow I=(-\infty;a]\cap\left[a^{-1};\infty\right)=\left[a^{-1};a\right]$;

Cazul V

Dacă $a=-1\Rightarrow I=\{-1\}$;

Cazul VI

Dacă $a=1\Rightarrow I=\{1\}$;

3. a) Fie $MO\perp(ABCD)$. Cum $ME\perp AD$ rezultă conform Teoremei celor 3 perpendiculare că $OE\perp AD$ (1).

Din $MO\perp(ABCD)$ și $MF\perp BC$ rezultă conform T.3.⊥ că $OF\perp BC$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că E,O,F coliniare. Deci $MO\subset(MEF)$,

$$MO\perp(ABC)\Rightarrow(MEF)\perp(ABC).$$

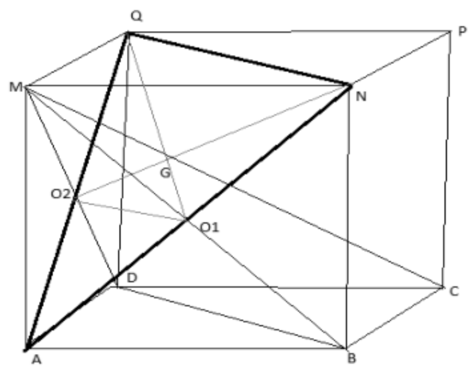
b)Notăm $MN=(MAD)\cap(MBC)$. Dacă prin două drepte paralele trec două plane care se intersectează după o dreaptă MN, atunci

$MN\parallel AD$ și $MN\parallel BC$;

$ME\perp AD, MN\parallel AD$ deci $EM\perp MN$.

$MF \perp BC, MN \parallel BC$, deci $MF \perp MN$, rezultă $\sphericalangle EMF$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MAD) și (MBC).
ΔMEF este triunghi isoscel cu un unghi de 60^0, rezultă că ΔMEF este echilateral cu latura de $6\sqrt{3}\ cm$. Deci $d(M, ABD) = MO = 9\ cm$.

4.



a) Fie O_1 centrul feței ABNM și O_2 centrul feței ADQM.

$MQ // BC \Rightarrow Q \in (MBC)$, $Q \in (ANQ)$ deci $Q \in (MBC) \cap (ANQ) (1)$.

$O_1 \in MB, MB \subset (MBC) \Rightarrow O_1 \in (MBC); O_1 \in AN, AN \subset (ANQ) \Rightarrow O_1 \in (ANQ)$, deci $O_1 \in (MBC) \cap (ANQ) (2)$.

Din (1) și (2) rezultă $(MBC) \cap (ANQ) = QO_1 = d_1$.

$MN // CD \Rightarrow N \in (MCD)$, $N \in (ANQ)$ deci $N \in (MCD) \cap (ANQ) (3)$.

$O_2 \in MD, MD \subset (MCD) \Rightarrow O_2 \in (MCD); O_2 \in AQ, AQ \subset (ANQ) \Rightarrow O_2 \in (ANQ)$,deci $O_2 \in (MCD) \cap (ANQ) (4)$.

Din (3) și (4) rezultă $(MCD) \cap (ANQ) = NO_2 = d_2$.
$O_1 \in MB, MB \subset (MDB) \Rightarrow O_1 \in (MDB)$; $O_1 \in AN, AN \subset (ANQ) \Rightarrow O_1 \in (ANQ)$,deci $O_1 \in (MDB) \cap (ANQ) (5)$.
$O_2 \in MD, MD \subset (MDB) \Rightarrow O_2 \in (MDB)$; $O_2 \in AQ, AQ \subset (ANQ) \Rightarrow O_2 \in (ANQ)$,deci $O_2 \in (MDB) \cap (ANQ) (6)$.
Din (5) și (6) rezultă $(MDB) \cap (ANQ) = O_1O_2 = d_3$.

În triunghiul ANQ, d_1 și d_2 sunt mediane, iar $[O_1O_2]$ este linie mijlocie, deci d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Triunghiul ANQ este echilateral cu latura de $5\sqrt{2}\ cm$. Fie $QO_1 \cap NO_2 = \{G\}$. Din $O_1O_2 \parallel NQ$ rezultă:

$$A_{\Delta O_1O_2G} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta QNG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ANQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{24} < 2.$$