**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**22 februarie 2015**

**Clasa a V-a**

**Problema 1.**

a). Să se scrie numărul natural $5^4$ ca suma a trei numere naturale pătrate perfecte.

b). Să se demonstreze că numărul natural $5^{2n+4}$ se scrie ca suma a trei numere naturale pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural $n$.

**Problema 2.**

Fie numerele naturale $x = 3^{2014} \cdot 5^{2015} + 2$ şi $y = 3^{2015} \cdot 5^{2014} + 2$.

a) Să se compare numerele $x^{2015}$ şi $y^{2014}$. $\left(\textit{justificați}\right)$

b) Să se demonstreze că $\left(x + y\right) \vdots 4$.

**Problema 3.**

Astăzi am fost la piaţa de păsări cu porumbei, gâşte şi curci, în total 80 de păsări, numărul curcilor fiind de cinci ori numărul gâştelor. Pentru 5 curci am primit la schimb 6 gâşte, iar pentru 7 gâşte am primit la schimb 11 porumbei. După schimb, am plecat acasă cu 100 de păsări, numai porumbei. Cu câţi porumbei, cu câte gâşte şi cu câte curci am plecat de acasă?

**Problema 4.**

a). Să se determine mulţimea $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* / n^2 + n + 2013 = 1 + 2 + 3 + ... + 2015\right\}$

b). Fie mulţimile:

$E = \left\{x / x = 2016^n + 2015^n \cdot 2017 + 2017,\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$

$F = \left\{y / y = a^2 + 2010,\ \ a \in \mathbb{N}\right\}$

Să se calculeze $E \cap F$.

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**22 februarie 2015**

**Clasa a VI-a**

**Problema 1.**

Se consideră punctele distincte *A, B, C, D* astfel încât punctul *B* este mijlocul segmentului $(AC)$ şi punctul C este mijlocul segmentului $(BD)$. Să se demonstreze că:

a). $BC = \dfrac{AC+BD}{4}$

b). $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD} < \dfrac{4}{AD}$.

**Problema 2.**

Fie $[OB \subset Int(\measuredangle AOD), [OC \subset Int(\measuredangle BOD)$ şi $[OM$, $[ON$, $[OP$, $[OQ$, $[OR$, respectiv bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle AOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle AOD$. Aflaţi măsura unghiului $\measuredangle AOB$ ştiind că diferenţa dintre măsurile unghiurilor $\measuredangle ROQ$ şi $\measuredangle MOP$ este de $15^0$.

**Problema 3.**

a). Să se determine numerele naturale $x, y, z, t$, ştiind că îndeplinesc simultan condiţiile:

1. $x + y + z \cdot t = 2015$
2. $\dfrac{x+y}{z \cdot t} = \dfrac{1}{4}$
3. $(x, y) = 31$
4. $[z, t] = 806$

b). Notând *(x, y, z, t)* o soluţie, să se calculeze numărul de soluţii care îndeplinesc simultan condiţiile date la punctul a).

**Problema 4 .**

*a*). Să se efectueze:

$$165:15;\quad 1665:15;\quad 16665:15;\ \underbrace{1666...65}_{n\ cifre\ \text{de } 6}:15.$$

b). Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+...+\frac{\overbrace{22...2}^{2015 cifre}}{\underbrace{55...5}_{2015 cifre}}\right):\frac{2}{5}-\frac{\overbrace{166...65}^{2015 cifre 6}}{\underbrace{500...0}_{2015 cifre 0}}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+...+\frac{1}{\underbrace{500...0}_{2015 cifre 0}}\right)\right]^n \left(\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{2015 cifre 0}}}{\frac{1}{22}+\frac{1}{202}+...+\frac{1}{\underbrace{200...02}_{2015 cifre 0}}}\right)^{n+1} = 8000$$

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**22 februarie 2015**
**Clasa a VII-a**

**Problema1.a)** Să se compare numerele reale a și b, știind că :

$$a=\sqrt{3^{2015}-2\cdot 3^{2014}-2\cdot 3^{2013}-...-2\cdot 3-2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\left|\sqrt{5}-3\right|$$

$$b=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}.$$

**b)** Arătaţi că $\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}$.

**Problema 2.** Fie $ABCD$ un trapez isoscel $\left(AB\parallel CD\right)$ cu diagonalele perpendiculare. Notăm cu $E$ şi $F$ mijloacele laturilor neparalele şi $AC\cap BD=\{O\}$. Ştiind că $EF=4$ cm şi că perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu 20 cm, determinaţi:

**a)** perimetrul triunghiului $\Delta OEF$.

**b)** aria trapezului.

**Problema 3.**

**a)** Să se determine cifrele $a$ şi $b$, unde $a\notin\{0,9\}$, pentru care numărul raţional $\overline{a,(ba)}+\overline{b,(ab)}+\overline{a,b(a)}$ se poate scrie ca fracţie zecimală finită.

**b)** Fie $x\neq -1,\ y\neq -2,\ z\neq -3$ numere raţionale, astfel încât $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014$. Calculaţi $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$.

**Problemă 4.** Fie $\Delta ABC$ un triunghi oarecare şi punctele $M\in\left(BC\right)$, $N\in\left(AC\right)$, $P\in\left(AB\right)$ astfel încât $BM=MC,\ AN=2\cdot NC$ şi $AP=3\cdot PB$. Dacă $T$ este mijlocul lui $\left(AC\right)$ şi $R$ simetricul lui $M$ faţă de $N$, demonstraţi că punctele $P,T,R$ sunt coliniare

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**22 februarie 2015**

**Clasa a VIII-a**

**Problema 1.**

Se dă expresia $E\left(x\right)=\left(\frac{4}{3x+5}+\frac{5}{5-3x}+\frac{4x+1}{9x^2-25}\right):\frac{44-x}{9x^2+30x+25}+3$

a). Să se determine valorile reale ale lui $x$ pentru care expresia E($x$) nu are sens.

b). Să se aducă expresia E($x$) la forma cea mai simplă.

c). Să se determine valorile întregi ale lui $x$ pentru care E($x$) este număr natural.

**Problema 2.**

a). Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^3y-6x^2+xy=6.$

b). Fie expresia $E(x)=\frac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+6},\ x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x)=2-\frac{3}{\left(x-1\right)^2+5}$.

c). Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(x)=\frac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+6},\ x\in\mathbb{R}.$

**Problema 3.** Numerele reale $x, y, z$ verifică relaţiile:

$$4\cdot x\cdot\sqrt{2}-3\cdot y^2+1=0$$
$$6\cdot y\cdot\sqrt{3}-6\cdot z^2+18=0$$
$$12\cdot z\cdot\sqrt{6}-2\cdot x^2-68=0$$

Să se demonstreze că $\frac{4\cdot x}{\sqrt{2}}+\frac{5\cdot y}{\sqrt{3}}+\frac{7\cdot z}{\sqrt{6}}$ este număr natural, pătrat perfect.

**Problema 4.**

Fie ABCD un paralelelogram cu diagonala BD perpendiculară pe latura AD şi cu unghiul dintre diagonale de măsură $45^0$. Fie $BN\perp AC$, $N\in AC$ şi $DM\perp(ABC)$. Dacă punctul P este simetricul punctului C faţă de punctul B, iar DM= $a\sqrt{2}$ şi DA=2a, să se calculeze:

a). distanţa de la punctul D la planul (AMP)

b). distanţa de la punctul M la dreapta PN.

## Barem de evaluare Clasa a V-a

| Nr. problemei | Soluţie, rezolvare | Punctaj |
|---|---|---|
| 1. | $a).\ 5^4=12^2+16^2+15^2=9^2+12^2+20^2.$ | 3p |
| | $b).\ 5^{2n+4}=5^{2n}\cdot 5^4=$<br>$5^{2n}\cdot\left(12^2+16^2+15^2\right)=5^{2n}\cdot 12^2+5^{2n}\cdot 16^2+5^{2n}\cdot 15^2=$<br>$\left(5^n\cdot 12\right)^2+\left(5^n\cdot 16\right)^2+\left(5^n\cdot 15\right)^2.$ | 1p<br>1p<br>1p<br>1p |
| 2. | $\left.\begin{array}{l} x=3^{2014}\cdot 5^{2014}\cdot 5+2=15^{2014}\cdot 5+2 \\ y=3^{2014}\cdot 3\cdot 5^{2014}+2=15^{2014}\cdot 3+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x>y;$<br>$\left.\begin{array}{l} x>y\Rightarrow x^{2014}>y^{2014} \\ x^{2015}=x^{2014}\cdot x\Rightarrow x^{2015}>x^{2014} \end{array}\right\}\Rightarrow x^{2015}>y^{2014}.$ | 3p<br>2p |
| | $x+y=15^{2014}\cdot 5+2+15^{2014}\cdot 3+2=$<br>$15^{2014}\cdot 8+4=4\cdot\left(15^{2014}\cdot 2+1\right)\Rightarrow (x+y)\,\vdots\,4.$ | 1p<br>1p |
| 3. | Dacă numărul gâştelor este $x$, atunci numărul curcilor este $5\cdot x$, iar numărul porumbeilor este $80-6\cdot x$. | 2p |
| | Pentru cele $5\cdot x$ curci, am primit $6\cdot x$ gâşte.<br>După acest schimb am $7\cdot x$ gâşte pentru care primesc la schimb $11\cdot x$ porumbei. | 2p<br>1p |
| | Aşadar, $11\cdot x+80-6x=100\Leftrightarrow 5\cdot x=20\Leftrightarrow x=4.$ | 1p |
| | Am plecat de acasă cu 4 gâşte, 20 curci şi 56 porumbei. | 1p |
| 4. | a). $\left.\begin{array}{l} n^2+n+2013=n\cdot(n+1)+2013 \\ n\cdot(n+1) \text{ este număr par (produs de numere consecutive)} \\ 2013 \text{ este număr impar} \end{array}\right\}\Rightarrow$<br>$n^2+n+2013$ este număr impar(1) | 2p |
| | $1+2+3+...+2015=2015\cdot 2016:2=2015\cdot 1008=$ număr par(2)<br>Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ A=$\varnothing$. | 1p |
| | b).<br>Fie $n\neq 0$<br>$u\left(2016^n+2015^n\cdot 2017+2017\right)=u(6+5+7)=8$ (1)<br>$u\left(a^2+2010\right)=u\left(a^2\right)\neq 8$ (2)<br>Din (1) şi (2) $\Rightarrow E\cap F=\varnothing.$ | 1p<br>1p |
| | Dacă $n$=0 $\Rightarrow x=4035\Rightarrow E=\{4035\};$<br>$4035\in F$ dacă ecuaţia $a^2+2010=4035$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale $a^2+2010=4035\Rightarrow a^2=2025\Rightarrow a=45\in\mathbb{N}$;<br>$a=45\Rightarrow y=4035$ $E\cap F=\{4035\}.$ | 1p<br>1p |

**Clasa a VI-a Barem de evaluare**

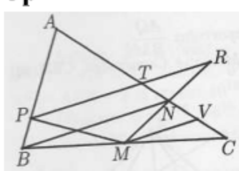
| Nr. | Soluţie, rezolvare | Punctaj |
|---|---|---|
| 1 | a) Punctul B este mijlocul segmentului $(AC) \Rightarrow B \in (AC), (AB) \equiv (BC)$;<br>$B \in (AC) \Rightarrow A, B, C$ puncte coliniare; (1)<br>Punctul C este mijlocul segmentului $(BD) \Rightarrow C \in (BD), (BC) \equiv (CD)$;<br>$C \in (BD) \Rightarrow B, C, D$ puncte coliniare; (2)<br>Din (1) şi (2) rezultă că A, B, C, D sunt coliniare. | 1p<br><br>1p |
| | $\left.\begin{array}{l}(AB) \equiv (BC) \Rightarrow 2 \cdot BC = AC \\ (BC) \equiv (CD) \Rightarrow 2 \cdot BC = BD\end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot BC = AC + BD \Rightarrow BC = \dfrac{AC+BD}{4}.$ | 2p |
| | b). $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{2 \cdot BC} + \dfrac{1}{2 \cdot BC} = \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{\frac{AD}{3}} = \dfrac{3}{AD} < \dfrac{4}{AD}.$ | 1p<br>1p<br>1p |
| 2 | $m(\measuredangle ROQ) = m(\measuredangle ROD) - m(\measuredangle QOD) =$<br>$= \frac{1}{2} m(\measuredangle AOD) - \frac{1}{2} m(\measuredangle COD) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOC)$<br>$m(\measuredangle MOP) = m(\measuredangle AOP) - m(\measuredangle AOM) =$<br>$= \frac{1}{2} m(\measuredangle AOC) - \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle BOC).$ | 2p<br><br>2p |
| | Deducem din cele două şiruri de egalităţi că<br>$m(\measuredangle ROQ) - m(\measuredangle MOP) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOC) - \frac{1}{2} m(\measuredangle BOC) =$<br>$\frac{1}{2} m(AOB) = 15° \Rightarrow m(\measuredangle AOB) = 30°$ | 2p<br><br>1p |
| 3 | a) $\dfrac{x+y}{z \cdot t} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow z \cdot t = 4 \cdot (x+y)$<br>Înlocuind în condiţia 1 $\Rightarrow 5 \cdot (x+y) = 2015 \Rightarrow x+y = 403 \Rightarrow z \cdot t = 1612,$<br>$(x, y) = 31 \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}, \ (m, n) = 1,$ astfel încât $x = 31 \cdot m, y = 31 \cdot n.$ | 2p |
| | $x + y = 403 \Rightarrow 31 \cdot m + 31 \cdot n = 403 \Rightarrow m + n = 13;$<br>$\left.\begin{array}{l} m+n=13 \\ (m,n)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=31 \\ y=372 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=62 \\ y=341 \end{cases}$<br>*sau* $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=93 \\ y=310 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} m=4 \\ n=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=124 \\ y=279 \end{cases}$<br>*sau* . $\begin{cases} m=12 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=372 \\ y=31 \end{cases}$ Aşadar, există 12 perechi de numere de forma $(x, y) \in \{(31, 372), (62, 341), (93, 310), ..., (372, 31)\}$ | 2p |

| | | |
|---|---|---|
| | $\begin{cases} z\cdot t=1612 \\ [z,t]=806 \\ [z,t]\cdot(z,t)=z\cdot t \end{cases} \Rightarrow (z,t)=2;$<br>$(z,t)=2 \Rightarrow (\exists)\, p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1,$ astfel încât $z=2\cdot p,\ t=2\cdot q$ ;<br>$\begin{cases} z\cdot t=1612 \\ z=2\cdot p \\ t=2\cdot q \end{cases} \Rightarrow p\cdot q=403;\quad \begin{cases} p\cdot q=403=13\cdot 31 \\ (p,q)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=13 \\ q=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=26 \\ t=62 \end{cases}$<br>*sau* $\begin{cases} p=31 \\ q=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=62 \\ t=26 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} p=403 \\ q=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=806 \\ t=2 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} p=1 \\ q=403 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ t=806 \end{cases}$<br>Aşadar, există 4 perechi de numere de forma $(z,t)\in\{(2,806),(26,62),(806,2),(62,26)\}$. | 2p |
| | b) Numărul soluţiilor de forma *(x, y, z, t)* care îndeplinesc simultan condiţiile date este $12\cdot 4=48$. | 1p |
| | a). $165:15=11 \quad 1665:15=111 \quad 16665:15=1111$ | 1p |
| | $\underbrace{1666...65}_{n\ cifre\ de\ 6}:15=\underbrace{111...11}_{(n+1)\ cifre\ de\ 1}$ | 1p |
| **4** | $\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+...+\frac{\overbrace{22...2}^{2015cifre}}{\underbrace{55...5}_{2015cifre}}=\underbrace{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+...+\frac{2}{5}}_{2015termeni}=2015\cdot\frac{2}{5}$<br>$\overbrace{166...65}^{2015cifre=6}=15\cdot\overbrace{111...11}^{2016cifre=1}$ ; | 1p |
| | $\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+...+\frac{1}{\underbrace{500...0}_{2015cifre=0}}=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+...+\frac{2}{\underbrace{100...0}_{2016cifre=0}}=$<br>$=\underbrace{0,222...2}_{2016cifre=2}=\frac{\overbrace{222...2}^{2016cifre=2}}{\underbrace{1000...0}_{2016cifre=0}}=\frac{\overbrace{111...1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000...0}_{2015cifre=0}}$. | 1p |
| | $\dfrac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{2015cifre0}}}{\frac{1}{22}+\frac{1}{202}+...+\frac{1}{\underbrace{200...02}_{2015cifre0}}}=\dfrac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{2015cifre0}}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{2015cifre0}}\right)}=2$ | 1p |
| | Ecuaţia devine:<br>$\left(2015-15\cdot\frac{\overbrace{111...1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000...0}_{2015cifre=0}}:\frac{\overbrace{111...1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000...0}_{2015cifre=0}}\right)^n\cdot 2^{n+1}=8000 \Leftrightarrow$ | 1p |
| | $2000^n\cdot 2^n\cdot 2=8000 \Leftrightarrow 4000^n=4000 \Rightarrow n=1.$ | 1p |

**Clasa a VII-a**

**Barem de evaluare**

| **Nr. problemei** | **Soluţie, rezolvare** | **Punctaj** |
|---|---|---|
| **1.** | a)<br>$a=\sqrt{3^{2015}-2\cdot 3^{2014}-2\cdot 3^{2013}-...-2\cdot 3-2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\left\|\sqrt{5}-3\right\|=$<br>$\sqrt{3^{2015}-2\cdot\left(3^{2014}+3^{2013}+...+3+1\right)}-\left\|2-\sqrt{5}\right\|-\left\|\sqrt{5}-3\right\|=$<br>$\sqrt{3^{2015}-\left(3^{2015}-1\right)}+2-\sqrt{5}+\sqrt{5}-3=0.$<br>$b=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=$<br>$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\quad a<b$ | <br><br>1p<br>1p<br>1p<br>1p |
| | b)<br>$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{15}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}\Leftrightarrow$<br>$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow\sqrt{5}\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow$<br>$5\cdot\sqrt{15}-15+15-3\cdot\sqrt{15}=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{15}=2\cdot\sqrt{15}$ | <br><br>**2p**<br><br>**1p** |
| **2.a** | a) Din formula $EF=\frac{AB+CD}{2}$, obţinem $AB+CD=2\cdot EF=2\cdot 4\text{ cm}=8\text{ cm}$ | **1p** |
| | Deci,<br>$P_{ABCD}=20\text{ cm}\Leftrightarrow AB+CD+2\cdot AD=20\text{ cm}\Leftrightarrow 8\text{ cm}+2\cdot AD=20\text{ cm}\Leftrightarrow$<br>$AD=6\text{ cm}$<br>$[OE]$ este mediană în triunghiul dreptunghic $\Delta OAD$, deci $OE=\frac{AD}{2}=\frac{6\text{ cm}}{2}=3\text{ cm}$. Analog, $OF=3\text{ cm}$. Prin urmare,<br>$P_{\Delta OEF}=OE+OF+EF=3\text{ cm}+3\text{ cm}+4\text{ cm}=10\text{ cm}$. | **1p**<br><br>2p |
| **2b** | **b)** Notăm cu $M$ şi $N$ mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$.<br>Deoarece triunghiurile $\Delta OAB$ şi $\Delta OCD$ sunt dreptunghice isoscele, deducem că $OM=\frac{AB}{2}$, $ON=\frac{CD}{2}$, $OM\perp AB$, $ON\perp CD$. | **2p** |
| | Adăugând $AB\parallel CD$ obţinem că punctele $O,M$ şi $N$ sunt coliniare şi<br>$h=MN=OM+ON==\frac{AB+CD}{2}=\frac{8\text{ cm}}{2}=4\text{ cm}$, unde cu $h$<br>am notat lungimea înălţimii trapezului $ABCD$. Prin urmare,<br>$A_{ABCD}=\frac{\left(AB+CD\right)\cdot h}{2}=\frac{8\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}}{2}=16\text{ cm}^2$. | <br><br><br>1p |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | **a)** Avem că<br>$\overline{a,(ba)}+\overline{b,(ab)}+\overline{a,b(a)}=\frac{\overline{aba}-a}{99}+\frac{\overline{bab}-b}{99}+\frac{\overline{aba}-\overline{ab}}{90}=$<br>$\frac{110\cdot a+110\cdot b}{99}+\frac{91\cdot a+9\cdot b}{90}=$<br>$=\frac{191\cdot a+109\cdot b}{90}$.<br>Pentru ca fracţia zecimală să fie finită este necesar ca $9$ să dividă numărul natural $191\cdot a+109\cdot b$, ceea ce este echivalent cu $9$ divide $2\cdot a+b$.<br>Dar, $3\le 2\cdot a+b\le 25$, de unde rezultă că $2\cdot a+b=9$ sau $2\cdot a+b=18$.<br>Se obţin soluţiile<br>$(a,b)\in\{(1;7),(2;5),(3;3),(4;1),(5;8),(6;6),(7;4);(8;2)\}$. | **2p**<br>1p<br>1p |
| | b) Din ipoteză avem<br>$\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014\Leftrightarrow 2015\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=2014\Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$. Deci,<br>$\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}+\frac{z+3-2}{z+3}=$<br>$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{y+2}+1-\frac{2}{z+3}=$<br>$=3-\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{y+2}+\frac{2}{z+3}\right)=3-2\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=$.<br>$3-2\cdot\frac{2014}{2015}=\frac{2017}{2015}$ | **1p**<br>1p<br>1p |
| 4. | Fie $V$ mijlocul segmentului $[NC]$. Din $AN+NC=AC$ şi $AN=2\cdot NC$ deducem $AN=\frac{2\cdot AC}{3}$. Cum $AT=\frac{AC}{2}$ rezultă $TN=\frac{AC}{6}$, relaţie pe care o notăm pe $(1)$. Din $NC=\frac{AC}{3}$ | **2p** |
| | şi $V$ este mijlocul lui rezultă $NV=\frac{AC}{6}$, relaţie care o notăm cu $(2)$. Din relaţiile $(1)$ şi $(2)$ rezultă $TN=NV$ şi cum $MN=NR$ deducem că $MVRT$ este paralelogram, deci $MV\parallel RT$, relaţie pe care o notăm cu $(3)$. Pe de altă parte, din $\frac{AP}{PB}=\frac{AT}{TN}=3$, cu teorema reciprocă a lui | **3p**<br><br> |
| | Thales în triunghiul $\Delta ABN$ rezultă $PT\parallel BN$, relaţie pe care o notăm cu $(4)$. Dar, $MV$ este linie mijlocie în triunghiul $\Delta CBN$, deci $MV\parallel BN$, relaţie pe care o notăm cu $(5)$. Din relaţiile $(4)$ şi $(5)$ rezultă $MV\parallel PT$ şi adăugând la acesta relaţia $(3)$ deducem că punctele $P$, $T$, $R$ sunt coliniare. | **2p** |

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**22 februarie-2015**

**Clasa a VIII-a**

**Barem de evaluare**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

| **Nr. problemei** | **Soluţie, rezolvare** | **Punctaj** |
|---|---|---|
| | $a$). $\begin{cases} 3x-5=0 \\ 3x+5=0 \\ 9x^2+30x+25=0 \\ 44-x=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 44\right\}$ | **1p** |
| | $b$). $E(x)=\frac{4\cdot(3x-5)-5\cdot(3x+5)+4x+1}{(3x+5)\cdot(3x-5)}:\frac{44-x}{(3x+5)^2}+3$ <br> $E(x)=\frac{12x-20-15x-25+4x+1}{(3x+5)\cdot(3x-5)}\cdot\frac{(3x+5)^2}{44-x}+3$ <br> $E(x)=\frac{x-44}{3x-5}\cdot\frac{3x+5}{44-x}+3$ <br> $E(x)=\frac{3x+5}{5-3x}+3$ <br> $E(x)=\frac{2\cdot(3x-10)}{3x-5}.$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| | $c)$. | |
| | $E(x)\in\mathbb{N}\Rightarrow\dfrac{2\cdot(3x-10)}{3x-5}\in\mathbb{N}\Rightarrow(3x-5)/2\cdot(3x-10)\Rightarrow$ | **1p** |
| | $(3x-5)/2\cdot(3x-5)-10\Rightarrow$ | |
| | $(3x-5)/10\Rightarrow(3x-5)\in\{-10,-5,-2,-1,1,2,5,10\}\Rightarrow$ | **1p** |
| | $3x\in\{-5,0,3,4,6,7,10,15\}\Rightarrow$ | |
| | $x\in\left\{0,1,\frac{4}{3},2,\frac{7}{3},\frac{10}{3},5\right\}$ | |
| | $\begin{cases}x\in\left\{0,1,\frac{4}{3},2,\frac{7}{3},\frac{10}{3},5\right\}\\ x\in\mathbb{Z}-\{44\}\end{cases}\Rightarrow x\in\{0,1,2,5\}$ | **1p** |
| | $x=0\Rightarrow E(0)=4\in\mathbb{N}$ | |
| | $x=1\Rightarrow E(1)=7\in\mathbb{N}$ | |
| | $x=2\Rightarrow E(2)=-8\notin\mathbb{N}$ | |
| | $x=5\Rightarrow E(5)=1\in\mathbb{N}$ | **1p** |
| | Soluţia: $x\in\{0,1,5\}$ | |
| **2.** | $x^3y-6x^2+xy=6\Leftrightarrow x^2\cdot(xy-6)+(xy-6)=0\Leftrightarrow(xy-6)\cdot(x^2+1)=0\Rightarrow$ | |
| | $xy-6=0\Rightarrow xy=6;$ | **1p** |
| | $\begin{cases}xy=6\\ x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=6\end{cases}sau\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}sau\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}sau\begin{cases}x=-1\\ y=-6\end{cases}sau$ | |
| | $\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}sau\begin{cases}x=-3\\ y=-2\end{cases}sau$ | |
| | $\begin{cases}x=6\\ y=1\end{cases}sau\begin{cases}x=-6\\ y=-1\end{cases}$ | |
| | Mulţimea soluţiilor este: | |
| | $\{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1),(-1,-6),(-2,-3),(-3,-2),(-6,-1)\}$ | **1p** |
| | $b)$. $E(x)=\dfrac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+6}=\dfrac{2\cdot(x^2-2x+6)-3}{x^2-2x+6}=2-\dfrac{3}{x^2-2x+6}=2-\dfrac{3}{(x-1)^2+5}$ | **2p** |
| | $E(x)$ este minimă dacă $\dfrac{3}{(x-1)^2+5}$ este maximă; | **1p** |
| | $\dfrac{3}{(x-1)^2+5}$ este maximă dacă $(x-1)^2+5$ este minimă $\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow$ | **1p** |
| | $E(x)$ este minimă pentru $x=1\Rightarrow$ valoarea minimă este $E(1)=\dfrac{7}{5}$. | **1p** |
| **3.** | Adunând egalităţile, obţinem: | |

| | | |
|---|---|---|
| | $12\cdot z\cdot\sqrt{6}-2\cdot x^2-68+6\cdot y\cdot\sqrt{3}-6\cdot z^2+18+4\cdot x\cdot\sqrt{2}-3\cdot y^2+1=0\Leftrightarrow$<br>$-12\cdot z\cdot\sqrt{6}+2\cdot x^2+68-6\cdot y\cdot\sqrt{3}+6\cdot z^2-18-4\cdot x\cdot\sqrt{2}+3\cdot y^2-1=0\Leftrightarrow$<br>$2\cdot\left(x^2-2x\sqrt{2}+2\right)+3\cdot\left(y^2-2\cdot y\cdot\sqrt{3}+3\right)+6\cdot\left(z^2-2\cdot z\cdot\sqrt{6}+6\right)=0\Leftrightarrow$<br>$2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2+3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2+6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0;$ | **3p** |
| | $\begin{cases}2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\\3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2\geq 0,\forall y\in\mathbb{R}\\6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2\geq 0,\forall z\in\mathbb{R}\\2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2+3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2+6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)^2=0\\\left(y-\sqrt{3}\right)^2=0\\\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{3}\\z=\sqrt{6}\end{cases}$ | **2p** |
| | $\frac{4\cdot x}{\sqrt{2}}+\frac{5\cdot y}{\sqrt{3}}+\frac{7\cdot z}{\sqrt{6}}=4+5+7=16=4^2\in\mathbb{N}.$ | **2p** |
| **4.** | a). Fie $AC\cap BD=\{O\}$.<br>Dacă simetricul lui C faţă de B este P, atunci PB=BC=AD şi adăugând BC $\parallel$ AD , deducem că APBD este paralelogram. Cum AD $\perp$ BD, obţinem APBD dreptunghi, iar de aici DA $\perp$ AP. | **1p** |
| | Având şi DM $\perp$ (ABC) deducem, conform teoremei celor trei perpendiculare, că MA $\perp$ AP.Construim DH $\perp$ MA, afirmaţie care, împreună cu MA $\perp$ AP şi DA $\perp$ AP ne duce la concluzia că DH $\perp$ (MAP) (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare). | **1p** |
| | Se calculează DH ca înălţime a triunghiului dreptunghic DAM şi se obţine DH=d(D,(MAP))= $\frac{2}{3}$ a $\sqrt{3}$ . | **1p** |

Fie Q mijlocul lui (AB). Rezultă că NQ=$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DP$. Rezultă că triunghiul DNP este dreptunghic în N. **1p**

Construind cercul de diametru [DP], acesta va avea şi diametrul [AB] şi va conţine punctele A,B,P,N,D. Dacă diagonalele AC şi BD formează un unghi de $45^{0}$, rezultă că $m(\measuredangle NOB)=m(\measuredangle OBN)=45°$.Unghiurile OBN şi DPN au ca măsură jumătate din măsura arcului DN şi deci, triunghiul DNP este triunghi dreptunghic isoscel. Avem încă DB= 2 DO= =2AD= 4a, iar de aici AB=DP= 2a $\sqrt{5}$ iar DN=NP=a $\sqrt{10}$ . **2p**

Aplicăm teorema celor 3 perpendiculare şi, din DM $\perp$ (ABC), DN $\perp$ PN, DN şi PN incluse în planul (ABC), deducem MN $\perp$ PN, de unde rezultă că d(M,NP) este MN. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MNP, obţinem MN = 2 a $\sqrt{3}$ . **1p**

**Metoda 2-** determinarea lungimii segmentului $[DN]$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle ANB,\ m(\measuredangle N)=90° \\ [AQ]\equiv[QB]\end{array}\right\} \Rightarrow NQ=\frac{AB}{2} \\ \text{Dar ADBP dreptunghi: } [AB]\equiv[DP]\end{array}\right\} \Rightarrow NQ=\frac{DP}{2}$$

$$\text{Din }\begin{cases} NQ=\frac{DP}{2} \\ [DQ]\equiv[QP]\end{cases} \Rightarrow m(\measuredangle DNP)=90° \Rightarrow DN \perp PN;$$

$$\text{În } \triangle DOA : m(\measuredangle ADO)=90° \overset{T.P}{\Rightarrow} AO=2a\sqrt{2};$$

$$\text{În } \triangle DOA \begin{cases} m(\measuredangle ADO)=90° \\ [AD]\equiv[DO] \\ fie\ DE\perp AC, E\in(AO)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[AE]\equiv[EO] \\ DE=\frac{AO}{2}=a\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow EO=\frac{AO}{2}=a\sqrt{2} \Rightarrow EN=2a\sqrt{2}$$

$$\text{În } \triangle DEN : m(\measuredangle DEN)=90° \overset{T.P}{\Rightarrow} DN=a\sqrt{10}.$$