S.S.M.R - FILIALA MUREŞ

Olimpiada de matematică

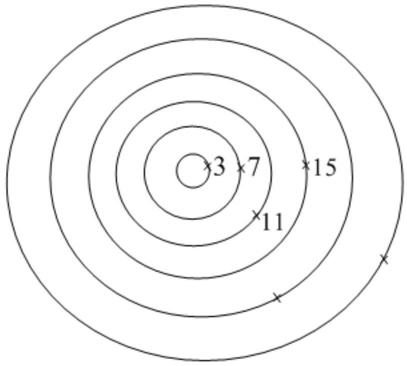
Faza locală 13.02.2015

Clasa a V-a

SUBIECTUL I

Calculaţi: $a = \left\{ \left[2^3 \cdot 5^2 + \left(25^{50} : 5^{99} + 2^2 \cdot 3 \right) \cdot 5^2 \right] : 5^3 + 2^7 + 11^{1991} : \left(11^2 \right)^{995} \right\} : \left(3^3 + 3^2 \right)$

SUBIECTUL II



Pe cercurile din figură sunt aşezate numerele 3, 7, 11, 15, …....

a) Scrieţi numerele ce urmează a fi aşezate pe următoarele două cercuri;

b) Să se determine numărul ce trebuie aşezat pe al 2015 – lea cerc;

c) Să se arate că numărul de pe cercul al 2015 – lea, nu este pătrat perfect;

d) Să se calculeze suma numerelor de pe primele 2015 cercuri.

SUBIECTUL III

Să se determine numerele formate din două sau trei cifre care împărțite la 13 dau câtul *a* și restul *b* și împărțite la 11 dau câtul *b* și restul *a* .

SUBIECTUL IV

Dintre numerele 2^{213} şi 3^{142} numărul mai mare se înmulțește cu 24 iar numărul mai mic se înmulțește cu 18. Arătați că diferența numerelor astfel obținute este divizibilă cu 72.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 2 ore.

Probleme selectate de prof. Macavei Luminița și prof. Andreica Gheorghe

Clasa a V-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

a $= \{[8\cdot 25+(5+12)\cdot 25]:5^3+2^7+11\}:(36)$ 2p

$\{(8\cdot 25+17\cdot 25):5^3+2^7+11\}:36$ 1p

$\{(25\cdot 25):5^3+128+11\}:36$ 2p

$\{5+128+11\}:36$ 1p

$144:36=4$ 1p

SUBIECTUL II

a) 19, 23 ....2 p

b) Numerele de pe cercuri sunt de forma 4k + 3 deci, pe al 2015 – lea cerc este $4\cdot 2014+3=$ 8059 ....2p

c) Numărul de pe al 2015 – lea cerc este cuprins între două pătrate consecutive $89^2<8059<90^2$

Sau: nr. de forma 4k + 3 nu sunt pătrate perfecte. 1p

SUBIECTUL III

Fie A numărul căutat, atunci: $A=13a+b, b\le 12$ 1p

și $A=11b+a, a\le 10$ 1p

De unde $13a+b=11b+a\Rightarrow 6a=5b$, ...2p

deci $a\in\{5,10\}$ și $b\in\{6,12\}$ 2p

Numerele căutate sunt: 71 și 142. ....1p

SUBIECTUL IV

Comparăm cele două numere:

$2^{213}=2^{3\cdot 71}=(2^3)^{71}=8^{71}$ iar...1p

$3^{142}=3^{2\cdot 71}=(3^2)^{71}=9^{71}$, ...1p

deci 3^{142} este mai mare.

$3^{142}\cdot 24-2^{213}\cdot 18=$ 2p

$3^{142}\cdot 2^3\cdot 3-2^{213}\cdot 2\cdot 3^2=$

$3^{143}\cdot 2^3-2^{214}\cdot 3^2=2^3\cdot 3^2\cdot(3^{141}-2^{211})=$ 2p

$72\cdot(3^{141}-2^{211})$ 1p

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VI-a

SUBIECTUL I

a) Arătați că $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ oricare ar fi x număr natural.

b) Aflați x din $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{4030}{2016}$.

SUBIECTUL II

Arătați că

a) numărul $a=7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$ este divizibil cu 100, oricare ar fi $n\in N$.

b) numărul $b=(n-4)\cdot 7^n+(n-3)\cdot 7^{n+1}+(n+2)\cdot 7^{n+2}+(n-1)\cdot 7^{n+3}$ este divizibil cu 10, oricare ar fi $n\in N, n\geq 4$.

Constantin Bozdog, Reghin

SUBIECTUL III

Fie punctele coliniare A, O, D unde $O\in(AD)$ și unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente, iar semidreapta (OC este interioară unghiului $\sphericalangle BOD$. Dacă $m(\sphericalangle BOC)=5\cdot m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)=\frac{5}{3}m(\sphericalangle COD)$ și $[OM$ este bisectoarea $\sphericalangle AOC$ iar Q punct interior unghiului $\sphericalangle BOD$ astfel încât $m(\sphericalangle MOQ)=90^o$, se cere:

a) $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle COD)$.

b) Să se arate că [OQ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$.

SUBIECTUL IV

Fie punctele coliniare A, B, C, D (în această ordine) situate pe dreapta d, astfel încât $[AB]\equiv[CD]$. De aceeaşi parte a dreptei d se consideră punctele E şi F astfel încât $[BE]\equiv[CF]$, $\sphericalangle EBC\equiv\sphericalangle FCB$ şi $[BF\subset \text{Int}\sphericalangle EBC$. Să se demonstreze că:

a) $[AE]\equiv[DF]$;

b) $\sphericalangle AFC\equiv\sphericalangle DEB$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

Probleme selectate de prof. Gînța Florica, prof. Gînța Vasile și prof. Seceleanu Daniela

Clasa a VI-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

a) Calcul direct...(1p)

b) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{4030}{2016}$ (1)

$\frac{1}{1}=\frac{1}{\frac{1\cdot 2}{2}}=\frac{2}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}=\frac{2}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}=\frac{2}{3\cdot 4}$ s.a.m.d

$\frac{1}{1+2+...+x}=\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{2}{x\cdot(x+1)}$. **(3p)** Atunci relatia (1) devine

$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{4030}{2016}\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{4030}{2016}$

(2p) $\Leftrightarrow\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow x=2015$ **(1p)**

SUBIECTUL II

a) Ultimele doua cifre ale lui 7^n pentru n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, k$\in N$ sunt 01,07,49, respectiv 43……………………………………………………………………………2p

Oricare ar fi n$\in N$, ultimele doua cifre ale lui a sunt 0, deci a⋮100……………………...1p

b)Pentru n=4, U(b)=U($7^5+6\cdot 7^6+3\cdot 7^7$)=U($7+6\cdot 9+3\cdot 3$) =U(7+4+9)=0……………...1p

Pentru n>4, b=n($7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$)-4$\cdot 7^n-3\cdot 7^{n+1}$+2$\cdot 7^{n+2}$-$7^{n+3}$ si tinand seama de a), mai trebuie calculata ultima cifra a numarului c=2$\cdot 7^{n+2}$-4$\cdot 7^n$-3$\cdot 7^{n+1}$-7^{n+3}…………………………...1p

Pentru n=4k, U(c)=U($2\cdot 9-4\cdot 1-3\cdot 7-3$) $=0$

n=4k+1, U(c)=U($2\cdot 3-4\cdot 7-3\cdot 9-1$) $=0$

n=4k+2, U(c)=U($2\cdot 1-4\cdot 9-3\cdot 3-7$) $=0$

n=4k+3, U(c)=U($2\cdot 7-4\cdot 3-3\cdot 1-9$) $=0$,

deci b⋮10, oricare ar fi n$\in N$, n≥4…………………………………………………………2p

SUBIECTUL III

a) Fie m(∢BOC)=a, deci m(∢AOB)=$\frac{a}{5}$, m(∢COD)=$\frac{3a}{5}$ **1p**

Obținem relația $\frac{a}{5}+a+\frac{3a}{5}=180^\circ$. a=100º **1p**.................................

Finalizare m(∢AOB)=20º, M(∢BOC)=100º, m(∢COD)=60º **2p**

b) m(∢AOM)=m(∢AOC):2=60º **1p**

m(∢QOD)=180º-[m(∢AOM)+m(∢MOQ)]=

=180º-(60º+90º)=30º **1p**

m(∢QOD)=30º=60º:2=m(∢COD):2, deci (OQ bisectoarea unghiului ∢COD

SUBIECTUL IV

a) Arătăm că $\Delta EBA\equiv\Delta ECD$. Din ipoteză avem că, [AB] $\equiv$ [CD] și [BE] $\equiv$ [CF], iar din faptul că $\angle$EBC $\equiv$ $\angle$FCB deducem că $\prec EBA\equiv\prec FCD$ (au același suplement). Deci, în baza cazului (L.U.L) avem că $\Delta EBA\equiv\Delta FCD$ de unde rezultă că [AE] $\equiv$ [DF]. **(4p)**

b) Vom considera triunghiurile ΔFAC, respectiv ΔEDB în care știm că [BE] $\equiv$ [CF], $\angle$EBC $\equiv$ $\angle$FCB și [BD] $\equiv$ [CA]. Atunci în baza cazului de congruență (L.U.L) avem că $\Delta FAC\equiv\Delta EDB$ de unde rezultă că $\angle$AFC $\equiv$ $\angle$DEB. **(3p)**

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a

Subiectul I

Calculați numărul și arătați că este rațional:

$$A=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$$

Subiectul II

Arătați că :

a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$; oricare ar fi $n\in N^{*}$

b) $\frac{2013}{1\cdot 2}+\frac{2012}{2\cdot 3}+\frac{2011}{3\cdot 4}+...\frac{2}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$

Subiectul III

În triunghiul ABC , AM este mediană , iar MD și ME sunt bisectoarele unghiurilor AMB respectiv AMC ($D\in AB$, $E\in AC$). Notăm cu N , respectiv P proiecţiile punctelor D si E pe AM . Arătați că DP și EN sunt paralele.

(G. M. nr 6-7-8, 2013)

Subiectul IV

Fie punctele A,B,C,Dastfelîncât $AB \parallel CD$ și $CD=\frac{AB}{2}$. Fie $AD\cap BC=\{E\}$ șidouăpunctediferite F și G simetrice față de C, unde $F,G\notin BC$. Arătațicădreptele EG și BF sunt:

a) paralele dacă A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC;

b) concurenteînmijloculsegmentului [BF], dacă A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

Constantin Bozdog,Reghin

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme selectate de: prof. Angela Stoica. prof. Cornelia Căpușan, prof. Constantin Bozdog

Clasa a VII-a
Bareme de corectare

Subiectul I

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$

. . .

$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}=\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{4096575}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$ .... (3p)

Prin însumare se obține A=1-$\frac{1}{\sqrt{2025}}$ .... (3p)

Finalizare A=$\frac{44}{45}\in Q$ .... (1p)

Subiectul II

a)$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{n^2-n^2+1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ deci propoziția este adevărată .... (3p)

b) se aplică relația pentru fiecare fracție $\frac{2013}{1\cdot 2}=2013\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{2012}{2\cdot 3}=2012\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ $\frac{2011}{3\cdot 4}=2011(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

. . .

$\frac{1}{2013\cdot 2014}=(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})$ ....(2p)

Adunăm relațiile și obținem

S=2013-$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.\ .\ .-\frac{1}{2014}=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}+.\ .\ .+1-\frac{1}{2014}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+.\ .\ .+\frac{2013}{2014}$ .... (2p)

Subiectul III

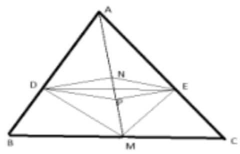
În triunghiurile ABM și AMC scriem teorema bisectoarei pentru bisectoarea MD respectiv ME și obținem: $\frac{BM}{MA}=\frac{BD}{DA}$ respectiv $\frac{CM}{MA}=\frac{CE}{EA}$ (1)………… …. 2p

AM mediana deci MB=MC , si inlocuim si aplicăm Reciproca Thales si deducem ca DE si BC sunt paralele………...…1p

Notam cu O intersectia dintre AM si DE.

Obținem că triunghiurile ADO și ABM sunt asemenea și deci $\frac{AD}{AB}=\frac{AO}{AM}=\frac{DO}{BM}$(2)

iar triunghiurile AOE și AMC sunt asemenea și deci $\frac{AO}{AM}=\frac{AE}{AC}=\frac{OE}{MC}$ (3)



Din relatiile 1,2 , 3 deducem ca DO =OE . ……..…

Din congruenta triunghiurilor dreptunghice OPE și OND (cazul IU) avem că OP și ON sunt congruente.………...……1p

În patrulaterul DPEN avem DO =OE si OP=ON deci DPEN este paralelogram de unde concluzia ……………...………………1p.

Subiectul I V

Teorema fundamentală a asemanarii in ΔABE (CD$\|$ AB): ΔABE~ΔDCE $\Rightarrow \frac{CE}{BE}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$

a) A si D de aceeasi parte a dreptei BC $\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ BC=CE

Dar CF=CG, deci BFEG paralelogram

b) A si D de o parte si de alta a dreptei BC $\Rightarrow BF\|EG$ 2p

$\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$ CF=CG, deci E este centru de greutate in BFG......................................

GE mediana GE contine mijlocul segmentului [BF]...1p

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VIII-a

Subiectul I

Dacă pentru numerele reale a și b are loc relația $a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=0$, să se demonstreze că $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot(b-a)=1$

SUBIECTUL II

Aflaţi dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, ştiind că lungimile diagonalelor feţelor lui sunt invers proporţionale cu $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\frac{\sqrt{11}}{11}$ şi $\frac{\sqrt{6}}{6}$, iar lungimea diagonalei lui este egală cu $\sqrt{12}$ cm.

Supliment GM nr.10/2013

SUBIECTUL III

a) Arătaţi că oricare ar fi *x, y* numerele reale pozitive, are loc inegalitatea $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$

b) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale pozitive *x, y, z,* are loc inegalitatea: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

***

SUBIECTUL IV

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A iar punctul M exterior planului ABC astfel încât $MB\perp AB$ şi $MC\perp AC$. Fie *N, P* şi *E* mijloacele segmentelor *AM*,*BC* respectiv *AC*. Stabiliţi dacă :

a) $PN\perp(ABC)$;

b) $4PN^2=BM^2-AC^2$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiecte selectate şi propuse de: prof. Botez Radu, prof. Bonta Patricia, prof. Danciu Alin și prof. Cojocnean Mihaela

Clasa a VIII-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I .

$a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=0 \Leftrightarrow \left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=0 \Rightarrow a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}$ 4p

$\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=3-2=1$ 3p

SUBIECTUL II

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{12} \Rightarrow d^2=a^2+b^2+c^2=12$ (1)..1p

Diagonalele fețelor au lungimile: $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, respectiv $\sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}=\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{11}=\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=k$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}k$, $\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{11}k$, $\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}k$ 2p

$\Rightarrow a^2+b^2=7k^2,\ a^2+c^2=11k^2,\quad b^2+c^2=6k^2 \Rightarrow$ adunând cele trei relații:

$2(a^2+b^2+c^2)=24k^2 \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2=12k^2 \Rightarrow$ înlocuind în (1)

$\Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=1$ 2p

$\Rightarrow a^2+b^2=7 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$ cm

$a^2+c^2=11 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=1$ cm

$b^2+c^2=6 \Rightarrow a^2=6 \Rightarrow a=\sqrt{6}$ cm..2p

SUBIECTUL III

a) $x+y\geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$ 2p

b)Notăm $a=\frac{x^2}{y^2}$, $b=\frac{y^2}{z^2}$ și $c=\frac{z^2}{x^2}$

Din inegalitatea mediilor avem: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$; $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, respectiv $a+c\geq 2\sqrt{ac}$ ...2p

Însumând relațiile de mai sus obținem $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ 2p

Înlocuim în această inegalitate substituțiile inițiale obținem:

$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$ 1p

SUBIECTUL IV

a) Segmentele BN și CN sunt mediane relative ipotenuzei$\Rightarrow$ BN=$\frac{AM}{2}$=CN

$\Rightarrow \Delta NBC$ isoscel de vârf N şi cum $[NP]$ mediană$\Rightarrow$NP$\perp$BC(1) 1p

ΔMCA: $[NE]$ linie mijlocie$\Rightarrow$NE$\parallel$MC şi cum MC$\perp$AC obţinem NE$\perp$AC(2).................1p

ΔABC: $[PE]$ linie mijlocie$\Rightarrow$PE$\parallel$AB şi cum AB$\perp$AC obţinem PE$\perp$AC(3) 1p

Din (2)şi (3) obţinem AC$\perp(NEP)\Rightarrow$AC$\perp$NP(4) 1p

Din (1)şi (4) rezultă NP$\perp(ABC)$ 1p

b) $\Delta NPB \Rightarrow$ conform T.P

$NP^2=BN^2-PB^2=\frac{AM^2}{4}-\frac{BC^2}{4}$ 1p

$\Rightarrow 4NP^2=AM^2-\left(AC^2+AB^2\right)\Rightarrow 4NP^2=AM^2-AB^2-AC^2\Rightarrow 4NP^2=BM^2-AC^2$ 1p