**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** NEAMŢ
**ETAPA LOCALĂ**
**30 IANUARIE 2015**

**CLASA a V-a**

**Subiectul 1.** Fie suma $S = 101 + 1001 + 10001 + ... + \underbrace{100...001}_{2015\ cifre}$.

a. Aflaţi câte cifre are termenul din mijloc al sumei.
b. Aflaţi câte cifre de 0 se folosesc pentru a scrie toţi termenii sumei.
c. Calculaţi suma.

**Subiectul 2.** Numărul natural $\overline{abcd}$ are suma cifrelor egală cu 27. Arătaţi că $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 297.

**Subiectul 3.** Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$ ştiind că împărţite la $\left(\overline{ab} + \overline{ac}\right)$ dau câtul 5 şi restul 5.

**Subiectul 4.** Un elev are 15 creioane roşii şi 22 negre. În fiecare zi el pierde 2 creioane. Dacă pierde două creioane de acelaşi fel, în aceiaşi zi îşi mai cumpără un creion negru, iar dacă pierde un creion roşu şi unul negru îşi mai cumpără un creion roşu.

a. În a câta zi rămîne cu un singur creion?

b. Ce culoare are ultimul creion ce îi mai rămâne?

.

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**
**Timp de lucru: 2 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** NEAMŢ
**ETAPA LOCALĂ**
**30 IANUARIE 2015**

**CLASA a VI-a**

**Subiectul 1.** Fie numerele $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ și $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a. Comparați cele două numere.
b. Arătaţi că cele două numerele dau acelaşi rest prin împărţirea cu 165, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

**Subiectul 2.** Media aritmetică a numerelor naturale distincte $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$, 2014 şi 2016 este 2015.

a. Aflaţi media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$.
b. Dacă numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$ sunt pare arătaţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{2014} = 0$.

**Subiectul 3.** Să se determine cardinalul mulțimii $A = \left\{ \overline{ab} \,\middle|\, \dfrac{16}{a^2 + b} \in \mathbb{N} \right\}$.

**Subiectul 4.** Fie semidreptele opuse $[OX$ şi $[OY$, punctele A şi B de aceeaşi parte a dreptei $XY$, astfel încât $m(\sphericalangle BOX) = 2 \cdot m(\sphericalangle AOY)$, iar unghiul $BOX$ este obtuz.:

a) Arătaţi că $m(\sphericalangle AOX) > m(\sphericalangle AOY)$.

c) Dacă $[OB$ este bisectoarea $\sphericalangle AOY$ atunci aflaţi $m(\sphericalangle AOY)$.

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**
**Timp de lucru: 2 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** NEAMT
**ETAPA LOCALĂ**
**30 IANUARIE 2015**
**CLASA a VII-a**

**Subiectul 1.**

a. Aduceţi numărul raţional $\dfrac{2+4+6+...+2k}{1+3+5+...+(2k-1)}$ la forma ireductibilă.

b. Arătaţi că $\sqrt{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2+4}{1+3}\cdot\dfrac{2+4+6}{1+3+5}\cdot...\cdot\dfrac{2+4+6+...+2016}{1+3+5+...+2015}}$ este număr iraţional.

**Subiectul 2.** Numerele $a$ şi $b$ sunt raţionale pozitive şi $a<b$ .

a. Să se demonstreze că $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}<\dfrac{1}{a}$ .

b. Să se arate că $\dfrac{2}{3}<\left(\sqrt{6}\right)^{-1}+\left(\sqrt{15}\right)^{-1}+\left(\sqrt{35}\right)^{-1}<\dfrac{16}{15}$ .

**Subiectul 3.** Fie un paralelogram $ABCD$ şi punctele: $Q\in\left(AB\setminus\left[AB\right]\right.$ astfel încât $\dfrac{BQ}{AQ}=\dfrac{2}{3}$ , $M\in\left(DA\setminus\left[AD\right]\right.$ astfel încât $\dfrac{AM}{AD}=1$, iar $\{P\}=DB\cap MQ$ .

a. Arătaţi că $APQD$ este trapez.

b. Dacă aria triunghiului $MDQ$ este 24 $cm^2$ , aflaţi aria paralelogramului $ABCD$.

**Subiectul 4.** Se îndoaie o foaie de hârtie. Prin două puncte, A şi B, ale muchiei de pliere se fac, cu foarfeca, două tăieturi drepte AC şi BC. Se scoate bucata de hârtie cu contur triunghiul ABC. Desfăcând foaia de hârtie apare un spaţiu liber, delimitat de un poligon. Determinaţi condiţii asupra triunghiului ABC astfel încât poligonul să fie:

a. triunghi
b. romb
c. pătrat
d. dreptunghi care nu este pătrat
e. trapez

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**
**Timp de lucru: 3 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** NEAMT
**ETAPA LOCALĂ**
**30 IANUARIE 2015**

**CLASA a VIII-a**

**Subiectul 1.** Arătaţi că $\sqrt{\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{\frac{2+4}{1+3}}\cdot\sqrt{\frac{2+4+6}{1+3+5}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\frac{2+4+6+\ldots+2016}{1+3+5+\ldots+2015}}$ este număr iraţional .

**Subiectul 2.** Dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2-2\sqrt{2}a-2\sqrt{3}b=-5$ , arătaţi că $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=1$ .

**Subiectul 3.** Pe planul triunghiului isoscel ABC se ridică perpendiculara AM. Dacă AM=AC=b, AB=c iar $\left(b^2+c^2-6\right)^2+\left(b^2-c^2+4\right)^2=0$ calculaţi distanţa de la M la BC**.**

**Subiectul 4.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ considerăm $Q$ proiecţia lui $D'$ pe $A'C$ şi $S$ proiecţia lui $D'$ pe $AC'$. Arătaţi că:

a. $A'C\perp(D'QB')$

b. $QS\parallel(ABC)$ .

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**
**Timp de lucru: 3 ore**

## CLASA a V-a
## Bareme

**Subiectul 1.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | Suma are 2013 termeni, deci termenul din mijloc este al 1007-lea termen şi are 1009 cifre | **2p** |
| **b.** | Primul termen are un 0, al doilea 2 de 0, ..., ultimul are 2013 cifre de 0<br>1+2+...+2013=2027091 cifre de 0 se folosesc | **2p** |
| **c.** | $S=100+1000+...+\underbrace{100...00}_{2015\,cifre}+2013=\underbrace{111...100}_{2015\,cifre}+2013=\underbrace{111...1}_{2011\,cifre}3113$ | **3p** |

**Subiectul 2.**

| | | |
|---|---|---|
| | $\overline{abcd}+\overline{dcba}=1001a+110b+110c+1001d=$ | **2p** |
| | $=110(a+b+c+d)+891a+891d=110\cdot 27+891a+891d$ | **3p** |
| | $=297(10+3a+3d)$ deci se divide cu 297 | **2p** |

**Subiectul 3.**

| | | |
|---|---|---|
| | $\overline{abc}=\left(\overline{ab}+\overline{ac}\right)\cdot 5+5$<br>$100a+10b+c=100a+5b+5c+5$ | **3p** |
| | $5b=4c+5$ deci $c=0$ sau $c=5$ | **1p** |
| | Dacă $c=0$ atunci $b=1$ numerele sunt de forma $\overline{a10}$ a cifră nenulă | 1**p** |
| | Dacă $c=5$ atunci $b=5$ numerele sunt de forma $\overline{a55}$ a cifră nenulă | 1**p** |
| | Numerele sunt 110, 210, ..., 910, 155, 255, ..., 955 | 1p |

**Subiectul 4.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | În fiecare zi pierde 2 creioane dar cumpără 1, deci la sfârşitul zilei are cu un creion mai puţin decât în ziua precedentă.<br>La sfârşitul zilei cu numărul 36 rămâne cu un singur creion | **3p** |
| **b.** | Dacă pierde 2 roşii sau 2 negre cumpără un creion negru $\Rightarrow$ numărul de creioane roşii nu se modifică sau scade cu 2<br>Daca pierde unul roşu si unul negru cumpără un creion roşu $\Rightarrow$ numărul de creioane roşii nu se modifică<br>În ambele cazuri numărul de creioane negre se modifică cu 1 (în plus sau minus)<br>Numărul iniţial de creioane roşii este 15, număr impar, deci în momentul in care mai rămâne cu 1 creion acesta este roşu | **4p** |

**CLASA a VI-a**
**Bareme**

**Subiectul 1.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1} = 8 \cdot 3^{n+1} \cdot 3 \cdot 25^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 24$<br>$b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1} = 7 \cdot 5^{n+1} \cdot 5 \cdot 15^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 35$<br>$\Rightarrow a < b$ | **3p** |
| **b.** | $a = 75^{n+1} \cdot 24 = 75^{n+1} \cdot (22+2) = 75^{n+1} \cdot 22 + 75^{n+1} \cdot 2$<br>$b = 75^{n+1} \cdot 35 = 75^{n+1} \cdot (33+2) = 75^{n+1} \cdot 33 + 75^{n+1} \cdot 2$<br>$75^{n+1} \cdot 22 \vdots 165$ şi $75^{n+1} \cdot 33 \vdots 165$<br>restul împărţirii lui a la 165 este restul împărţirii lui $75^{n+1} \cdot 2$ la 165<br>restul împărţirii lui b la 165este restul împărţirii lui $75^{n+1} \cdot 2$ la 165. | **4p** |

**Subiectul 2.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014} + 2014 + 2016) : 2016 = 2015 \Rightarrow$<br>$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014} = 2015 \cdot 2016 - 2016 - 2014 \Rightarrow$<br>$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}) : 2014 = 2015$ | **3p** |
| | Calculă suma celor mai mici 2014 numere pare, distincte, nenule şi diferite de 2014 şi 2016: $2+4+6+...+2012+2018+...+4032 = 2(1+2+...+2016) - 2014 - 2016 =$<br>$= 2016 \cdot 2017 - 2016 - 2014 = 4062242$ sumă care este cu 4032 mai mare decât 2014·2015<br>Trebuie sa scădem 4032 din sumă, numerele trebuie să rămână pare, deci unul dintre numere devine 0. | **4p** |

**Subiectul 3.**

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{16}{a^2+b} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b / 16 \Rightarrow a^2 + b \in \{1,2,4,8,16\}$ | **2p** |
| | $a^2 + b = 16 \Rightarrow$ a=4 şi b=0 sau a=3 şi b=7$\Rightarrow$ numerele 40 şi 37 | **1p** |
| | $a^2 + b = 8 \Rightarrow$ a=2 şi b=4 sau a=1 şi b=7$\Rightarrow$ numerele 24 şi 17 | **1p** |
| | $a^2 + b = 4 \Rightarrow$ a=2 şi b=0 sau a=1 şi b=3$\Rightarrow$ numerele 20 şi 13 | **1p** |
| | $a^2 + b = 2 \Rightarrow$ a=1 şi b=1 $\Rightarrow$ numărul 11 | **1p** |
| | $a^2 + b = 1 \Rightarrow$ a=1 şi b=0 $\Rightarrow$ numărul 10 deci cardinalul mulţimii A este 8 | **1p** |

**Subiectul 4.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $2 \cdot m(\sphericalangle AOY) < 180° \Rightarrow m(\sphericalangle AOY) < 90°$<br>$m(\sphericalangle AOX) = 180° - m(\sphericalangle AOY) \Rightarrow m(\sphericalangle AOX) > 90°$<br>$\Rightarrow m(\sphericalangle AOX) > m(\sphericalangle AOY)$. | **3p** |
| **b.** | [OB este bisectoarea $\sphericalangle AOY \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOY) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AOY)$<br>$m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle BOY) = 180° \Rightarrow 2 \cdot m(\sphericalangle AOY) + \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AOY) = 180° \Rightarrow$<br>$\Rightarrow m(\sphericalangle AOY) = 72°$ | **4p** |

# CLASA a VII-a
# Bareme

**Subiectul 1.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $\dfrac{2+4+6+...+2k}{1+3+5+...+(2k-1)}=\dfrac{2\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}}{k^2}=\dfrac{k+1}{k}$<br>*k* şi *k*+1 sunt consecutive, deci prime între ele. Fracţia este ireductibilă | **3p** |
| **b.** | $\sqrt{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2+4}{1+3}\cdot\dfrac{2+4+6}{1+3+5}\cdot...\cdot\dfrac{2+4+6+...+2016}{1+3+5+...+2015}}=\sqrt{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{1014}{1013}}=$<br>$=\sqrt{1014}$ număr ireductibil (demonstrarea faptului că 1014 nu este p.p.) | **3p**<br>**1p** |

**Subiectul 2.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $0<a<b \;/\cdot(a>0) \Rightarrow 0<a^2<ab \Rightarrow 0<a<\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{ab}}<\dfrac{1}{a}$<br>$0<a<b \;/\cdot(b>0) \Rightarrow 0<ab<b^2 \Rightarrow 0<\sqrt{ab}<b \Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ | **3p** |
| **b.** | Aplicam relaţia de la punctul a. :<br>$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}<\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}<\dfrac{1}{5}$<br>Adunând inegalităţile obţinem: $\dfrac{2}{3}<\dfrac{71}{105}<\left(\sqrt{6}\right)^{-1}+\left(\sqrt{15}\right)^{-1}+\left(\sqrt{35}\right)^{-1}<\dfrac{31}{30}<\dfrac{16}{15}$ | **4p** |

**Subiectul 3.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | QA mediană, iar B este situat la 2/3 de vârf, deci B este centrul de greutate al triunghiului QDM<br>DP este deci mediană, P mijlocul MQ<br>AP linie mijlocie în triunghiul MQD $\Rightarrow$AP$\parallel$QD, trapez | **3p** |
| **b.** | DP mediană în triunghiul MDQ$\Rightarrow$aria triunghiului MDP este 12 $cm^2$<br>PA mediană în triunghiul MDP$\Rightarrow$aria triunghiului ADP este 6 $cm^2$<br>$DB=\dfrac{2}{3}DP$ $\Rightarrow$aria triunghiului ABD este $\dfrac{2}{3}$ din aria triunghiului ADP, deci 4 $cm^2$<br>Aria paralelogramului ABCD este 8 $cm^2$. | **4p** |

**Subiectul 4.**

| | | |
|---|---|---|
| | Fie D simetricul punctului C faţă de AB (după desfacerea hârtiei)<br>Triunghiurile ACB şi ADB sunt simetrice faţă de AB şi împreună formează conturul spaţiului liber din hârtie.$\Rightarrow$ CA=AD şi CB=BD | **2p** |
| **a.** | Spaţiul liber este un triunghi dacă punctele C, A, D sau C, B, D sunt coliniare, deci dacă $CA\perp AB$ sau $CB\perp AB$ | **1p** |
| **b.** | Se obţine romb dacă CA=CB , adică triunghiul ABC este isoscel (justificare) | **1p** |
| **c.** | Se obţine pătrat dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel (justificare) | **1p** |
| **d.** | Patrulaterul ACBD are diagonalele perpendiculare deci nu se poate obţine dreptunghi care să nu fie pătrat | **1p** |
| **e.** | Dacă $AC\parallel BD\Rightarrow\sphericalangle CAB\equiv\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle CBA$ deci triunghiul ABC este isoscel şi obţin romb.<br>La fel dacă $BC\parallel AD$, deci nu se poate obţine trapez. | **1p.** |

## CLASA a VIII-a
## Bareme

**Subiectul 1.**

| | | |
|---|---|---|
| | $\dfrac{2+4+6+...+2k}{1+3+5+...+(2k-1)}=\dfrac{2\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}}{k^2}=\dfrac{k+1}{k}$ | **3p** |
| | $\sqrt{\dfrac{2}{1}}\cdot\sqrt{\dfrac{2+4}{1+3}}\cdot\sqrt{\dfrac{2+4+6}{1+3+5}}\cdot...\cdot\sqrt{\dfrac{2+4+6+...+2016}{1+3+5+...+2015}}=$ <br> $\sqrt{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2+4}{1+3}\cdot\dfrac{2+4+6}{1+3+5}\cdot...\cdot\dfrac{2+4+6+...+2016}{1+3+5+...+2015}}=\sqrt{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{1014}{1013}}=$ <br> $=\sqrt{1014}$ număr ireductibil (demonstrarea faptului că 1014 nu este p.p.) | **4p** |

**Subiectul 2.**

| | | |
|---|---|---|
| | $a^2+b^2-2\sqrt{2}a-2\sqrt{3}b=-5\Leftrightarrow\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=0\Rightarrow$ <br> $a=\sqrt{2}$ şi $b=\sqrt{3}$ | **4p** |
| | $\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\right)(b-a)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1$ | **3p** |

**Subiectul 3.**

| | | |
|---|---|---|
| | $\left(b^2+c^2-6\right)^2+\left(b^2-c^2+4\right)^2=0\Rightarrow c=\sqrt{5}$ şi $b=1$ <br> AC=1, AB= $\sqrt{5}\Rightarrow$BC= $\sqrt{5}$ (1+1< $\sqrt{5}$ ) | **2p** |
| | Construcţia perpendicularei MN pe BC (T3$\perp$) | **2p** |
| | Calculul înălţimii $AN=\dfrac{\sqrt{95}}{10}$ <br> Calculul distanţei $MN=\dfrac{\sqrt{195}}{10}$ | **3p** |

**Subiectul 4.**

| | | |
|---|---|---|
| **a.** | $D'B'\perp\left(ACC'\right)\Rightarrow D'B'\perp A'C$ <br> $A'C\perp D'Q, A'C\perp D'B', D'Q\cap D'B'=\{D'\}\Rightarrow\ A'C\perp\left(D'QB'\right)$ | **3p** |
| **b.** | $\Delta D'A'C\equiv\Delta D'C'A\Rightarrow\sphericalangle D'A'C\equiv\sphericalangle D'C'A$ <br> $\Delta D'A'Q\equiv\Delta D'C'S\Rightarrow A'Q\equiv C'S$ <br> $A'Q=C'S, A'O=C'O\Rightarrow QS\parallel A'C'$ , $\{O\}=A'C\cap AC'$ <br> $A'C'\parallel AC, AC\subset(ABC)$ şi concluzia. | **4p** |