COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a V-a

1. Fie $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n,$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$

a) Pentru $n = 10,$ stabiliți care este cifra miilor numărului $A.$

b) Determinați cel mai mic număr n pentru care A se divide cu 1000.

c) Pentru n găsit anterior, demonstrați că A nu este pătrat perfect.

2. a) Determinați numerele $\overline{68ab}$ care, la împărțirea prin 33, dau restul 23.

b) Fie $a = 3^{2^n} + 1,$ $n \in \mathbb{N}.$ Să se determine valorile lui n pentru care a este pătrat perfect.

3. Se consideră şirul 2, 10, 26, 58, 122, ...

a) Scrieți încă trei termeni ai şirului.

b) Determinați al 2009-lea termen al şirului.

Subiect elaborat de Valerica Bența

COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2009

CLASA a VI-a

1. Se consideră unghiurile adiacente şi suplementare $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$. În semiplanul delimitat de dreapta AC care conține punctul B, se consideră punctele M şi N astfel încât $OM \perp OA$ şi $ON \perp OB$. Dacă $m(\sphericalangle CON) = 4 \cdot m(\sphericalangle AOB)$, determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle CON$ şi $\sphericalangle MON$.

2. a) Aflați numerele prime a şi b pentru care $5(a + 105) + b = 5a^2 - 2003.$

b) Determinați valorile naturale ale lui n pentru care $2^{3n} + 2$ şi $3^{2n} + 1$ sunt simultan divizibile cu 10.

3. a) Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\dfrac{3n+1}{2n+3}$ este reductibilă.

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + ... + \dfrac{1}{2010^2} < \dfrac{2009}{2010}.$

Subiect elaborat de Gabriela Zanoschi

COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a VII-a

1. Determinați mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \middle| \sqrt{\overline{abc} - \sqrt{c}} \in \mathbb{N},\ a,b,c \text{ cifre distincte} \right\}$.

2. a) Găsiți tripletele de numere întregi (x, y, z) pentru care
$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(y+2)^2} + \sqrt{(z+3)^2} = 1\,.$$
b) Aflați câte triplete de numere întregi (x, y, z) verifică relația
$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(y+2)^2} + \sqrt{(z+3)^2} = 2009\,.$$

3. In triunghiul ABC avem: $m(\widehat{B})=105^{\circ}$, $m(\widehat{C})=30^{\circ}$, $[AD]$ mediană, $[AE]$ bisectoare, cu $D, E \in [BC]$, iar $[BF]$ este înălțime, cu $F \in [AC]$.
a) Arătați că triunghiul AFD este isoscel. **b**) Aflați $m(\widehat{DAE})$.

4. Pe laturile (AB), (BC), (CD), (DA) ale pătratului $ABCD$ se consideră respectiv punctele M, N, P, Q.
a) Dacă dreptele MP şi NQ sunt perpendiculare şi M', N' sunt proiecțiile punctelor M şi N pe laturile (CD), respectiv (AD), arătați că $\Delta MPM'$ şi $\Delta NQN'$ sunt congruente.
b) Dacă $AM + CP = BN + DQ$, arătați că dreptele MP şi NQ sunt perpendiculare

Subiect elaborat de Sergiu Prisacariu

COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a VIII-a

1. Aflați numerele raționale a şi b, ştiind că $\dfrac{a}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \dfrac{b}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

2. Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{n^2 + 8n + 37} \in \mathbb{Q}$.

3. Arătați că dacă $a, b, c, d \in (0;\ +\infty)$ sunt astfel încât $a \cdot b = c \cdot d = 10$, atunci are loc inegalitatea $(a+2)(b+2)(c+5)(d+5) \geq 1600$.

4. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime 4cm. Punctele M şi N se află pe muchiile AA', respectiv CC', astfel încât $A'M = CN = 1$cm.
a) Calculați aria totală a piramidei $ACD'B'$.
b) Calculați lungimea segmentului MN.
c) Demonstrați că punctele B, N, D' şi M sunt coplanare.

Subiect elaborat de Alice Anița