SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1.

Soluţie. Deoarece raportul a două numere raţionale este număr raţional şi $\dfrac{a-\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, rezultă că există $q\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{a}=q\sqrt{b}$. **3p**

Atunci $b-\sqrt{ab}=b\,(1-q)$ este număr raţional, de unde, ţinând cont că $q\neq 1$ (altfel am avea $a=b$), rezultă că b este număr raţional. **2p**

Întrucât $a=q^2b$, rezultă că şi a este număr raţional. **2p**

Problema 2.

Soluţie. Fie S proiecţia punctului D pe dreapta AC. Din $DS\perp VO$ şi $DS\perp AC$ rezultă $DS\perp(VAC)$, prin urmare proiecţia pe planul (VAC) a triunghiului VDC este triunghiul VSC. **2p**

Fie u şi v măsurile unghiurilor formate de planul (VCD) cu planele (VAC) şi respectiv (BAC). Avem echivalenţele

$$u=v\Leftrightarrow\cos u=\cos v\Leftrightarrow\frac{\text{aria}[VSC]}{\text{aria}[VDC]}=\frac{\text{aria}[COD]}{\text{aria}[VDC]}$$

$$\Leftrightarrow\text{aria}[VSC]=\text{aria}[COD]\Leftrightarrow VO\cdot CS=\frac{1}{2}AB\cdot BC.$$ **2p**

Din teorema catetei avem $DC^2=CS\cdot CA$. Cum $DC=AB$, rezultă $CS=\frac{AB^2}{AC}$. **1p**

În consecinţă, $u=v\Leftrightarrow VO\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC\Leftrightarrow\dfrac{VO}{OA}=\dfrac{BC}{AB}\Leftrightarrow\sphericalangle VAC=\sphericalangle BAC$, ceea ce trebuia demonstrat. **2p**

Problema 3.

Soluţie. Pentru $x=1$ obţinem $\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{n}{a+b+c}$, de unde $n\leq 3$. **2p**

Vom arăta că numărul cerut este $n=3$. Este suficient să arătăm că $E\left(x\right)\overset{not}{=}\dfrac{1}{ax+b+c}+\dfrac{1}{a+bx+c}+\dfrac{1}{a+b+cx}\geq\dfrac{3}{a+b+c}$, pentru orice $x\in\left[0,1\right]$. **1p**

Folosind inegalitatea dintre media armonică şi media aritmetică a numerelor $ax+b+c$, $a+bx+c$ şi $a+b+cx$, rezultă că $E\left(x\right)\geq\frac{9}{(a+b+c)(x+2)}$.
.... **3p**

Cum $x\in\left[0,1\right]$, rezultă $x+2\leq 3$, de unde se obţine că $E\left(x\right)\geq\frac{3}{a+b+c}$, pentru orice $x\in[0,1]$. **1p**

Problema 4.

Soluţie. Deoarece AD este perpendiculară pe BC şi pe BE, rezultă $AD\perp(BEC)$, de unde $AD\perp CE$. Analog obţinem $DF\perp AC$. **2p**

Fie $\{H\}=CE\cap DF$. Deoarece BH este intersecţia planelor (BEC) şi (BFC), deducem că $BH\perp(ACD)$. **2p**

Rezultă că proiecţia Q a punctului M pe planul (ACD) este mijlocul segmentului $[AH]$. **1p**

Cercurile ciecumscrise triunghiurilor AEF şi BEF au centrele N şi Q. Cum linia centrelor este perpendiculară pe coarda comună, avem $NQ\perp EF$. **1p**

Deoarece $MQ\perp EF$, rezultă $EF\perp(MQN)$, deci $MN\perp EF$.

1p