Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

Clasa a V-a

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puţin egale cu a şi cel mult egale cu b.

Problema 2. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Ştiind că fiecare elev a rezolvat cel puţin o problemă şi că numărul de soluţii corecte ale tuturor concurenţilor este 100, arătaţi că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Problema 3. Mulţimea numerelor naturale nenule se împarte în submulţimi astfel:

$$\{1,2\}\ ,\ \{3,4,5\}\ ,\ \{6,7,8,9\}\ ,\ \ldots\ .$$

a) Aflaţi cel mai mic element din cea de-a 100-a submulţime.
b) Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulţimi?

Gazeta Matematică

Problema 4. a) Arătaţi că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 sunt egale cu 4.
b) Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4.
c) Demonstraţi că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4.

Clasa a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătaţi că:
a) indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;
b) este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A faţă de punctul C şi cu P intersecţia dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Ştiind că dreapta PM este perpendiculară pe BC, arătaţi că triunghiul APM este echilateral.

Problema 3. Determinaţi pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule A şi B, care au acelaşi număr de cifre, ştiind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obţinut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că numărul $a = \sqrt{9-\sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) \cdot \left(9-\sqrt{77}\right)$ este natural.
b) Se consideră numerele reale x îs y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ şi $y > 2$, arătaţi că $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.
b) Determinaţi câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii $[AC]$ şi punctul $N \in (AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P, paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q, iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S.
Demonstraţi că dreptele PS şi AC sunt paralele.

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul isoscel ABE, cu $m(\sphericalangle ABE) = 120^\circ$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB, cu N piciorul perpendicularei din M pe AB, iar cu P intersecţia dreptelor CN şi MB.
Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE. Demonstraţi că dreptele PG şi AE sunt paralele.

Clasa a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulţimea

$$A_a = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{n^2 - an} \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Arătaţi că mulţimea A_a este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii A_{40}.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2016}} \right\}.$$

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi $AB' \cap A'B = \{O\}$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $A'C \parallel (B'AN)$. Ştiind că $D'O \perp (B'AN)$ demonstraţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Soluţie Problema 1.

Conform relaţiei din enunţ, avem $\overline{ab} = a + (a+1) + ... + b$ şi, cum $a + (a+1) + ... + b \leq 1 + 2 + ... + 9 = 45$, rezultă $a \leq 4$ **3p**

Pentru $a = 4$, rezultă $\overline{ab} \geq 45 = 1 + 2 + ... + 9$, deci ar trebui ca $a = 1$ (şi $b = 9$), nu convine **1p**

Dacă $a = 3$ obţinem $3 + 4 + ... + (b-1) + b = \overline{3b} = 30 + b$. Scăzând b şi adunând $1 + 2$ în ambii membri, rezultă $1 + 2 + ... + (b-1) = 32$, de unde $(b-1) \cdot b = 64$, egalitate care nu se realizează pentru nicio valoare $b \in \{4, 5, ..., 9\}$ **1p**

Dacă $a = 2$, atunci $2 + 3 + ... + (b-1) + b = \overline{2b} = 20 + b$. Scăzând b şi adunând 1 în ambii membri, rezultă $1 + 2 + ... + (b-1) = 21$, de unde $(b-1) \cdot b = 42$.

Cum $6 \cdot 7 = 42$, egalitatea are loc pentru $b = 7$, deci un număr care satisface condiţia din enunţ este $\overline{ab} = 27$ **1p**

Pentru $a = 1$ obţinem $1 + 2 + ... + (b-1) + b = \overline{1b} = 10 + b$, de unde $1 + 2 + ... + (b-1) = 10$ sau $(b-1) \cdot b = 20$.

Egalitatea precedentă se verifică pentru $b = 5$, deci şi $\overline{ab} = 15$ satisface condiţia din enunţ **1p**

Soluţie Problema 2.

Fie a, b, c numărul elevilor care au rezolvat corect exact una, două, respectiv trei probleme.

Atunci $a + b + c = 50$ şi $a + 2b + 3c = 100$ **2p**

Rezultă $b + 2c = 50$ **2p**

Atunci $2c \leq 50$, deci $c \leq 25$ **3p**

Soluţie Problema 3.

a) Primele 99 de submulţimi conţin $2 + 3 + ... + 100 = 5049$ de elemente **2p**

În primele 99 de submulţimi sunt scrise numerele de la 1 la 5049, deci cel mai mic element al celei de-a 100-a submulţimi este 5050 .... **1p**

b) 2015 este cel mai mare element al celei de-a n -a submulţimi dacă $2 + 3 + ... + (n+1) = 2015$ .. **1p**

Adunând 1 în ambii membri rezultă $(n+1)(n+2) = 2 \cdot 2016 = 4032$ **2p**

Cum $63 \cdot 64 = 4032$, rezultă că 2015 este cel mai mare element al celei de-a 62-a submulţimi **1p**

Soluţie Problema 4.

a) $1038^2 = 1077\,444$ **1p**

b) Ridicând la pătrat un număr ale cărui ultime trei cifre sunt 038 se obţine un număr care se termină cu trei cifre de 4, după cum se vede din înmulţirea de mai jos **1p**

$$\begin{array}{cccccccl}
... & ... & ... & 0 & 3 & 8 & \times \\
... & ... & ... & 0 & 3 & 8 & \\
\hline
... & ... & ... & 3 & 0 & 4 & \\
... & ... & ... & 1 & 4 & & \\
\hline
... & ... & ... & 4 & 4 & 4 &
\end{array}$$

Sunt o infinitate de numere care se termină în 038, deci sunt o infinitate de pătrate perfecte terminate cu trei cifre de 4 .... **1p**

c) Fie a un număr natural al cărui pătrat se termină în patru cifre de 4; atunci a este par, $a = 2b$. În plus, a^2 are forma $10000k + 4444$, $k \in \mathbb{N}$, deci $4b^2 = a^2 = 4(2500k + 1111)$, de unde rezultă că ultimele două cifre ale lui b^2 sunt egale cu 1 .... **1p**

Ultima cifră a lui b este 1 sau 9 .... **1p**

Analizând înmulţirile

$$\begin{array}{cccccl}
... & ... & ... & n & 1 & \times \\
... & ... & ... & n & 1 & \\
\hline
... & ... & ... & n & 1 & \\
... & ... & ... & n & & \\
\hline
... & ... & ... & u & 1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccl}
... & ... & ... & m & 9 & \times \\
... & ... & ... & m & 9 & \\
\hline
... & ... & ... & p & 1 & \\
... & ... & ... & p & & \\
\hline
... & ... & ... & v & 1 &
\end{array}$$

rezultă că u este ultima cifră a lui $2n$, iar v este ultima cifră a lui $2p$, deci sunt cifre pare **1p**

Aşadar, penultima cifră a lui b^2 este pară, deci nu poate fi egală cu 1. Ca urmare, nu există pătrate perfect terminate în patru cifre de 4 .... **1p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Soluţie Problema 1.

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma $11a + 13b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă ar exista $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $86 = 11a + 13b$, atunci $b \leq 6$ **1p**

Atunci $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$, deci $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$ **1p**

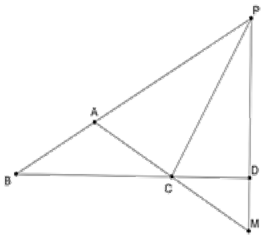
Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă **1p**

b) $2015 = 11 \cdot 182 + 13$.. **1p**

Putem obţine numărul 2015 prin 182 de paşi astfel:

$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \ldots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015$ .. **2p**

Soluţie Problema 2.



Fie $\{D\} = BC \cap PM$. Notăm $m(\sphericalangle ABC) = x$. Atunci $m(\sphericalangle MCD) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = x$, de unde $m(\sphericalangle PMC) = 90^\circ - x$ **2p**

Cum PC este mediatoarea segmentului $[AM]$, triunghiul PAM este isoscel, deci $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle PAC$ **2p**

Dar $m(\sphericalangle PAC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 2x$.

Rezultă $90^\circ - x = 2x$, de unde $x = 30^\circ$ **2p**

Atunci $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60^\circ$, deci triunghiul APM este echilateral.............. **1p**

Soluţie Problema 3.

Fie $\overline{aabcd}$ un pătrat perfect cu $a \neq 0, d \neq 0$, astfel încât $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect.

Deoarece $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect, rezultă $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$.............................. **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb55}$ sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb66}$ sunt divizibile cu 2 şi nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte... **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb11}$ sau $\overline{dcb99}$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărţirea cu 4 .... **2p**

Studiem cazul $a = 4$. Întrucât $209^2 < 44000$ şi $213^2 > 45000$, rezultă că $\overline{aabcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$.

Cum $210^2 = 44100$ nu are răsturnatul de 5 cifre, $211^2 = 44521$ şi $12544 = 112^2$, $212^2 = 44944$, numerele căutate sunt 44521 şi 44944 .... **2p**

Soluţie Problema 4.

Fie n numărul de cifre ale lui A şi B. Din relaţia din enunţ avem $(2A - 1)B = 10^n A$, de unde $2A - 1 \mid 10^n A$ **1p**

Cum $(2A - 1, A) = 1$ şi $(2, 2A - 1) = 1$, rezultă $2A - 1 \mid 5^n$, deci $2A - 1 \leq 5^n$ **2p**

Deoarece A are n cifre, rezultă $A \geq 10^{n-1}$, deci $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$. Obţinem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci $2^n \leq 6$, de unde $n \in \{1, 2\}$ **2p**

Pentru $n = 1$, din $2A - 1 \mid 5$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5\}$, deci $A \in \{1, 3\}$. Dacă $A = 1$, avem $B = 10$, care nu convine, deoarece B are o cifră. Dacă $A = 3$, avem $B = 6$ **1p**

Pentru $n = 2$, din $2A - 1 \mid 25$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$, deci $A \in \{1, 3, 13\}$; dar A are două cifre, deci $A = 13$ şi $25B = 1300$, deci $B = 52$. **1p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Soluţie Problema 1.

a) Numărul a se poate rescrie $\sqrt{18-2\sqrt{77}}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)$ **1p**

$18-2\sqrt{77}=\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2$ **2p**

Ca urmare, $a=\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)=\left(18-2\sqrt{77}\right)\left(9+\sqrt{77}\right)=8\in\mathbb{N}$ **1p**

b) Dacă $x>2$, $y>2$, atunci $(x-2)(y-2)>0$ **2p**

Rezultă $xy-2(x+y)+4>0$, de unde $x+y<\frac{1}{2}(xy+4)=5$ **1p**

Soluţie Problema 2.

a) Din ipoteză, există numerele naturale k şi r astfel încât $2p-q=k^2$, $2p+q=r^2$; atunci $r^2-k^2=2q$ **1p**

Atunci $(r-k)(r+k)=2q$, iar concluzia se obţine din faptul că $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate **2p**

b) Notând ca mai sus, avem $(r-k)(r+k)=2\cdot 4030=2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 31$ **1p**

Cum $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate, iar $r-k<r+k$, perechea $(r-k,r+k)$ poate fi $(2,4030)$, $(10,806)$, $(26,310)$ sau $(62,130)$.

Se obţine $r\in\{2016,408,168,96\}$, iar $p\in\{2030113,81217,12097,2593\}$, deci există 4 numere cu proprietatea din enunţ **3p**

Soluţie Problema 3.

Notând $MQ\cap AB=\{E\}$ şi $\{D\}=NP\cap ME$, obţinem $EA=EB$ şi $ND=DP$ **2p**

Cum $ANPB$ este trapez, punctele A,Q,P sunt coliniare **2p**

$\Delta ADP\equiv\Delta SDN$ (U.L.U.) **1p**

Rezultă $[AP]\equiv[SN]$ şi, cum $AP\parallel SN$, patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, deci $PS\parallel AC$ **2p**

Soluţie Problema 4.

$m(\sphericalangle BAM)=15^\circ$ implică $MN=\frac{1}{4}AB$ **2p**

Din $MN\parallel BC$ rezultă $\Delta PMN\sim\Delta PBC$, deci $\frac{PM}{PB}=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{4}$ şi, notând $\{Q\}=BM\cap AE$, rezultă $\frac{PM}{BQ}=\frac{1}{6}$, de unde $PB=PM+\frac{1}{2}BQ=\frac{2}{3}BQ$ **3p**

Dacă F este mijlocul segmentului $[AE]$, atunci $\frac{BG}{BF}=\frac{2}{3}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $PG\parallel AE$ **2p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Soluţie Problema 1.

Deoarece a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $-a+b+c$, $a-b+c$ şi $a-b-c$ sunt strict pozitive. Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică avem

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}} = \sqrt{1 \cdot \frac{a}{a+b+c}} \geq \frac{2}{1+\frac{a}{a+b+c}} = \frac{2a}{b+c}$$

şi analoagele **3p**

Este suficient să demonstrăm că $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

Notând $b+c=x$, $a+c=y$, $b+c=z$, obţinem $a = \dfrac{-x+y+z}{2}$, $b = \dfrac{x-y+z}{2}$ şi $c = \dfrac{x+y-z}{2}$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$\frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$$

care este adevărată, deoarece $u + \dfrac{1}{u} \geq 2$, pentru orice $u > 0$ **4p**

Soluţie Problema 2.

a) Dacă $a = 0$ atunci $A = \mathbb{N}$, care este infinită **1p**

Dacă $a \neq 0$ atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 + an = p^2$ **1p**

Obţinem $4n^2 + 4an + a^2 = 4p^2 + a^2$, de unde $(2n + a - 2p)(2n + a + 2p) = a^2$ **1p**

Ca urmare, $2n + a + 2p$ este divizor al lui a^2 (care este nenul), deci $2n < 2n + a - 2p \leq a^2$, de unde rezultă că n poate lua un număr finit de valori, adică A este finită **2p**

b) Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care $n^2 + 40n$ este pătrat perfect. Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2 = n^2 + 40n$.

Obţinem $p^2 - 400 = (n+20)^2$, de unde $(n + 20 - p)(n + 20 + p) = 400$. Numerele $p - n - 20$ şi $p + n + 20$ au aceeaşi paritate, deci vor fi pare. Avem $2 \cdot 200 = 4 \cdot 100 = 8 \cdot 50 = 400$, de unde $n \in \{81, 32, 9\}$. Elementul căutat este 81. .... **2p**

Soluţie Problema 3.

Fie $(x, y) \in M$. Cum $\sqrt{2016} = 12\sqrt{14}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} - \frac{1}{\sqrt{14y}} = \frac{1}{2016} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} = \frac{1}{\sqrt{14y}} + \frac{1}{2016}.$$

Prin ridicare la pătrat obţinem $\dfrac{1}{14x} = \dfrac{1}{14y} + \dfrac{1}{2016} + \dfrac{1}{1008\sqrt{14y}}$, de unde $\sqrt{14y} \in \mathbb{Q}$ şi, ca urmare $\sqrt{14x} \in \mathbb{Q}$.

Atunci există numerele naturale nenule a, b pentru care $x = 14a$ şi $y = 14b$. **3p**

Înlocuind în relaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{12\sqrt{14}}$, obţinem $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{12}$, de unde $a = \dfrac{12b}{b+12}$. **2p**

Din $\dfrac{12b}{b+12} \in \mathbb{N}$ rezultă $b + 12 \mid 144$, deci $b \in \{4, 6, 12, 24, 36, 60, 132\}$, de unde $a \in \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

În concluzie, mulţimea M admite 7 elemente. **2p**

Soluţie Problema 4.

Din $D'A' \perp (ABB')$ şi $D'O \perp AB'$ obţinem $A'O \perp AB'$, deci $ABB'A'$ este pătrat. **2p**

Apoi $A'C \parallel (ANB')$ şi $(ANB') \cap (A'BC) = ON$, deci $A'C \parallel ON$. Cum O este mijlocul segmentului $[A'B]$, atunci N este mijlocul segmentului $[BC]$. **1p**

În dreptunghiul $A'BCD'$, avem $m(\sphericalangle D'ON) = 90°$, de unde $\Delta D'A'O \sim \Delta OBN$. Atunci $\dfrac{D'A'}{A'O} = \dfrac{OB}{ON}$, ceea ce conduce la $\dfrac{A'B^2}{4} = \dfrac{A'D'^2}{2}$, deci $A'B = A'D\sqrt{2}$. Obţinem $A'D = A'A$, deci $AA'D'D$ este pătrat. **3p**

Concluzia se obţine remarcând că $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu toate feţele laterale pătrate, deci este cub. **1p**