Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a VII-a

Problema 1. Într-un pătrat de latură 60 se consideră 121 de puncte distincte. Arătaţi că, printre acestea, există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30.

Problema 2. Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ în punctele P respectiv R. Punctul Q este simetricul punctului P faţă de mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi că

a) $QR = AD$; b) $QR \perp AD$.

Problema 3. a) Arătaţi că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3 este egal cu 0 sau cu 1.

b) Un număr natural N este scris în baza zece numai cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sau 7. Notăm cu a_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ numărul de apariţii ale cifrei i în scrierea numărului N. Ştiind că $a_i = 4i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, arătaţi că numărul N nu este pătrat perfect.

Problema 4. Determinaţi suma elementelor mulţimii

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{2} + \frac{m}{5}, m, n \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}\}.$$

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Demonstraţi că $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, pentru orice număr real a.

b) Determinaţi numerele reale x şi y cu proprietatea că

$$(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0.$$

Problema 2. a) Arătaţi că numărul $m^2 - m + 1$ aparţine mulţimii $\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, oricare ar fi m număr natural nenul.

b) Fie p un pătrat perfect, $p > 1$. Demonstraţi că există numerele naturale nenule r şi q astfel încât $p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1)$.

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale. Un plan α ce conţine punctul A intersectează semidreptele $(BB'$ şi $(CC'$ în punctele E şi F astfel încât $\text{aria}\,\Delta ABE + \text{aria}\,\Delta ACF = \text{aria}\,\Delta AEF$. Determinaţi măsura unghiului format de planul (AEF) cu planul (BCC').

Problema 4. Determinaţi numerele naturale m pentru care

$$\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m + 2011}\}.$$

Notă. $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.