

Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

CLASA a VIII-a

Problema 1.

Soluție. a) Inegalitatea se scrie $3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \geq 0 \iff 9a^2 - 6a + 1 \geq 0$

..... **1 punct**

echivalent cu $(3a - 1)^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat. **2 puncte**

b) Avem $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$. **1 punct**

Conform punctului anterior, $3y^2 - 2y + 3 \geq \frac{8}{3}$.

Rezultă că $(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2$, oricare ar fi numerele reale x, y . **1 punct**

Egalitatea se obține pentru $(3y - 1)^2 = 0$ și $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$ **1 punct**

de unde $x = \frac{1}{2}$ și $y = \frac{1}{3}$. **1 punct**

Problema 2.

Soluție.

a) Avem $m^2 - m + 1 = (m - 1)^2 + (m - 1) + 1$ **2 puncte**

Cum $m - 1 \geq 0$, rezultă $m - 1 \in \mathbb{N}$, deci $m^2 - m + 1 \in \{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

..... **1 punct**

b) Fie k număr natural astfel încât $p = k^2$. Avem $k \geq 2$, deoarece $p > 1$

..... **1 punct**

Cum $p^2 + p + 1 = k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2$

..... **1 punct**

rezultă că $p^2 + p + 1 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$ **1 punct**

Alegem $r = k$ și $q = k - 1$. Cum ambele sunt numere naturale nenule, cerința este demonstrată. **1 punct**

Problema 3.

Soluție. Fie M mijlocul segmentului BC .

Triunghiul MEF este proiecția triunghiului AEF pe planul (BCC') .

..... **1 punct**

Notăm cu u măsura unghiului format de planele (AEF) și (BCC') .

Avem $\cos u = \frac{[MEF]}{[AEF]} =$ **1 punct**

$= \frac{[BCFE]}{2[AEF]} = \frac{[BCFE]}{2([ABE] + [ACF])} =$ **2 puncte**

$= \frac{[BCFE]}{4([MBE] + [MCF])} = \frac{[BCFE]}{2[BCFE]} = \frac{1}{2}$. **2 puncte**

Rezultă că $u = 60^\circ$. **1 punct**

Problema 4.

Soluție.

Ecuția se scrie $\sqrt{m} - [\sqrt{m}] = \sqrt{m + 2011} - [\sqrt{m + 2011}]$, adică

$$\sqrt{m + 2011} - \sqrt{m} = [\sqrt{m + 2011}] - [\sqrt{m}] = p \in \mathbb{N}. \quad \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

Din $\sqrt{m + 2011} = p + \sqrt{m}$, rezultă prin ridicare la pătrat $2011 = p^2 + 2p\sqrt{m} \in \mathbb{N}$, deci $m = k^2, k \in \mathbb{N}^*$ **2 puncte**

Prin urmare $2011 = p(p + 2k)$ și cum 2011 este număr prim, obținem $p = 1$ și $p + 2k = 2011$ **2 puncte**

Rezultă $k = 1005$ și $m = 1005^2$ **1 punct**