**Concursul Interjudeţean "Matematica, de drag"**

**Ediţia a VIII - a, Bistriţa 22 - 24 noiembrie 2013**

Clasa a V-a

**Subiectul I.**

Găsiţi numerele naturale a şi b pentru care: $63a^3 + 78b^2 = 2013$.

**Subiectul II**

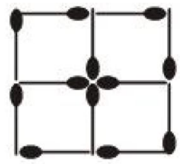
Se numeşte număr "împerecheat" un număr natural scris în baza zece care are patru cifre şi este format din două perechi de cifre egale (exemple: 5577, 7755, 5555, 5757, etc.).

a)Găsiţi două numere "împerecheate" care au suma 2011.

b)Dacă se aşază într-un şir toate numerele "împerecheate" în ordine crescătoare, aflaţi primii patru şi ultimii patru termeni ai şirului. c)Câte numere "împerecheate" există? Justificaţi răspunsul!

**Subiectul III**

Cu 12 chibrituri construim un pătrat 2x2 care conţine $2^2 = 4$ pătrăţele mici(ca în figura alăturată). Câte chibrituri sunt necesare pentru a construi un pătrat 100x100 care să conţină $100^2 = 10000$ de pătrăţele mici? Justificaţi răspunsul!



Clasa a VI-a

**Subiectul I**

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţiile:

a) $5xy + 11z = 55$. b) $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{7}{6}$

**Subiectul II**

Fie şirul de numere naturale 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...

a)Determinaţi următorii trei termeni ai şirului. b)Precizaţi dacă numărul 781 este termen al şirului.

**Subiectul III**

a)Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiţia: $c^3 + c^2 + c = \overline{abc}$.

b)Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că $(a+1)(a^2+2a) + b = 213$, iar $b$ este număr prim.

Clasa a VII-a

**Subiectul I**

Determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^m = m! + 232$, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m$.

**Subiectul II**

Determinaţi cel mai mic număr raţional pozitiv $r$ pentru care numerele $\frac{28}{45} \cdot r$ şi $\frac{98}{75} \cdot r$ sunt ambele naturale.

**Subiectul III**

Se consideră punctele fixe B şi C, iar punctul A oarecare (variabil) nesituat pe dreapta $BC$. În exteriorul triunghiului $ABC$ se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele $ACE$ şi $ABD$ cu $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEC}) = 90^o$. Arătaţi că mediatoarele segmentelor (DE) trec printr-un punct fix(printr-un acelaşi punct).

Clasa a VIII-a

**Subiectul I**

a) Fie $n$ un număr natural. Determinaţi $n$, dacă $n + 49$ şi $n - 49$ sunt cuburi perfecte.

b)Calculaţi $a = \sqrt{1 + 2010 \cdot \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot 2015}}}}$.

**Subiectul II**

Fie numerele reale $x,\ y,\ z$ pentru care au loc simultan relaţiile:

(i) $x + y + z = -a$ (ii) $xy + yz + zx = \frac{a^2+4a+11}{2}$

a) Găsiţi o relaţie independentă de $a$ între $x,\ y$ şi $z$.

b) Stabiliţi cărui interval de lungime, cu extremităţile numere întregi, aparţine fiecare dintre numerele $x, y, z$.

**Subiectul III**

Prin vârfurile $A, B, D$ şi $E$ ale hexagonului regulat $ABCDEF$ se consideră respectiv, dreptele $a, b, d$ şi $e$ astfel încât $a||b||d||e||a$. De aceeaşi parte a planului $(ABC)$ pe dreptele $a, b$ şi $d$ se iau respectiv, punctele $A', B'$ şi $D'$ astfel încât lungimile segmentelor $[AA']$, $[BB']$ şi $[DD']$ exprimate în unităţi de lungime sunt egale cu: $AA' = 2^{2012} + 2^{2011} + 2^{2010}$, $BB' = 2^{2013}$ şi $DD' = 2^{2010}$. Dacă planul $(A'B'D')$ intersectează dreapta $e$ în punctul $E'$, aflaţi distanţa dintre punctele $E$ şi $E'$.