Subiectul I.

Avem: $63a^3 + 78b^2 = 2013 \mid : 3 \iff 21a^3 + 26b^2 = 671$ (1)

Cum $21 \cdot 3^3 = 567$ şi $21 \cdot 4^3 = 1344$, din (1) rezultă că $a \leq 3$ 2p

Tot din (1) rezultă că a este impar.

Deci $a \in \{1, 3\}$ 1p

$a = 1$, conduce la $b = 5$ 2p

$a = 3$ conduce la $b = 2$ 2p

a) $1001 + 1010 = 2011$ 1p

b) 1001, 1010, 1100, 1111, ...; 9966, 9977, 9988, 9999 .... 2p

c) Numerele sunt formate cu cifrele a şi b, unde a şi b sunt nenule şi distincte.

Avem 6 numere împerecheate formate cu cifrele a şi b: $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$, $\overline{bbaa}$, $\overline{baba}$, $\overline{baab}$.

Dacă $a = 1$ şi $b \in \{2, 3, ..., 9\}$ avem $8 \cdot 6 = 48$ numere împerecheate.

Dacă $a = 2$ şi $b \in \{3, 4, ..., 9\}$ avem $7 \cdot 6 = 42$ numere împerecheate.

Dacă $a = 3$ şi $b \in \{4, 5..., 9\}$ avem $6 \cdot 6 = 36$ numere împerecheate.

Dacă $a = 4$ şi $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 5 = 30$ numere împerecheate.

Dacă $a = 5$ şi $b \in \{6, 7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 4 = 24$ numere împerecheate.

Dacă $a = 6$ şi $b \in \{7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 3 = 18$ numere împerecheate.

Dacă $a = 7$ şi $b \in \{8, 9\}$ avem $6 \cdot 2 = 12$ numere împerecheate.

Dacă $a = 5$ şi $b = 9$ avem $6 \cdot 1 = 6$ numere împerecheate.

În total avem $6 \cdot (1 + 2 + ... + 8) = 6 \cdot 8 \cdot 9 : 2 = 216$ numere împerecheate 2p

II

Dacă $a = b$ atunci numerele sunt de forma $\overline{aaaa}$, unde $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ şi atunci vor fi 9 numere împerecheate 1p

III

Dacă $b = 0$ atunci numerele împerecheate vor fi de forma $\overline{aa00}, \overline{a0a0}$ şi $\overline{a00a}$, unde $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$ şi vor mai fi $3 \cdot 9 = 27$ numere împerecheate.

în total avem $216 + 9 + 27 = 252$ numere împerecheate 1p

Subiectul III

De fiecare linie şi pe fiecare coloană a pătratului 100x100, împărţit în pătrăţele, vom folosi câte 100 de chibrituri 2p

Pătratul 100x100 conţine 101 linii şi 101 coloane 2p

Numărul total de chibrituri este egal cu $101 \cdot 100 + 101 \cdot 100 = 20200$ 3p

Subiectul I

a) Din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow 5|11z$ şi cum $(5, 11) = 1 \Rightarrow 5|z$ (1)

Din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow z \leq 5$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow z \in \{0, 5\}$ 1p

$z = 0 \Rightarrow xy = 11$, de unde $(x, y) \in \{(1, 11),\ (11, 1)\}$ 1p

Dacă $z = 5$, atunci din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow\ xy = 0$, de unde $x = 0$ şi $y \in\ \mathbb{N}$ sau $x \in \mathbb{N}$ şi $y = 0$ 1p

Deci $(x, y, z) \in \{1, 11, 0\},\ (11, 1, 0), (0,\ k,\ 5),\ (q, 0, 5)\}$ de unde $k,\ q\ \in\ \mathbb{N}$ 1p

b) Avem $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow\ 6a^2 = b(7a - 6)$, de unde

$7a - 6|6a^2 \Rightarrow 7a - 6|42a^2 \Rightarrow 7a - 6|42a^2 - 36a + 36a \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 7a - 6|6a(7a - 6) + 36a\ \Rightarrow\ 7a - 6|36a \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 7a - 6|7 \cdot 36a\ \Rightarrow 7a - 6|36(7a - 6) + 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 7a - 6|216$ sau $7(a - 1) + 1|216 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 7(a - 1) + 1\ \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216\}$ 1p

de unde $7(a - 1) + 1 \in \{1, 8, 36\}$ şi $a \in \{1, 2, 6\}$ 1p

Înlocuind pe a în ecuaţia dată se obţine soluţiile:

$a = 1,\ b = 6;\ a = 2,\ b = 3$ şi $a = 6,\ b = 6$ 1p

Subiectul II

Notăm termenii şi cu $a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_n, ...$

Avem:

$a_1 = 1 = 1$

$a_2 = 2 = 1 + 1$

$a_3 = 4 = 1 + 1 + 2$

$a_4 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3$

$a_5 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$

$a_6 = 16 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$a_7 = 22 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$a_8 = 29 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$a_9 = 37 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ 1p

Următorii trei termeni ai şirului sunt: 22, 29, 37 .... 1p

b) Observăm că: $a_2 = a_1 + 1,\ a_3 = a_2 + 2,\ a_4 = a_3 + 3, ...$ 1p

Deci $a_n = a_{n-1} + (n - 1) = [1 + 1 + 2 + 3 + ... + (n - 2)] + (n - 1) = 1 + (n - 1)n : 2$ 1p

781 este termeni al şirului dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + (n - 1)n : 2 = 781$,

adică $n(n - 1) = 1560 = 40 \cdot 39$ 2p

Deci 781 este al 40-lea termen al şirului 1p

Subiectul III

a) $\overline{abc} = c^3 + c^2 + c\ \Rightarrow\ 10 \cdot \overline{ab} = c^2(c + 1)$ 1p

Deci $100 \leq c^2(c + 1) < 100$, de unde $5 \leq c \leq 9$ 1p

Însă $10|c^2(c + 1)$, de unde $c \in \{5, 9\}$ 1p

Se obţine: $\overline{abc}\ \in \{155,\ 819\}$ 1p

b) $(a + 1)(a^2 + 2a) = a(a + 1)(a + 2)$ fiind produs de 3 numere consecutive, acesta se divide cu 3. . 1p

Din $3|(a + 1)(a^2 + 2a)$ şi $3|213\ \Rightarrow 3|b$ şi cum b este prim rezultă $b = 3$ şi $a(a + 1)(a + 2) = 210$, de unde $a = 5$ 2p

Subiectul I

$m \leq 3 \ \Rightarrow m^m < 232$ "nu convine" 1p

$m = 4 \ \Rightarrow 4^4 = 4! + 232$ soluţie 1p

$m \geq 5 \ \Rightarrow m^m = m! + 2^3 \cdot 29$, de unde $m|2^3 \cdot 29$,

adică $m \in \{8, \ 29, \ 58, \ 116, \ 232\}$ 1p

$m = 8$ conduce la $8^8 = 8! + 2^3 \cdot 29$, de unde

$8^7 = 7! + 29$, fals pentru că $7!$ este par 1p

$m = 29$ conduce la $29^{29} = 29! + 8$, de unde $2|29$, fals 1p

$m = 116$ conduce la $116^{116} = 116! + 232$, de unde $116^{115} = 115! + 2$ şi $4|2$, contracdicţie! 1p

$m = 232$ conduce la $232^{232} = 232! + 232$, de unde $232^{231} = 231! + 1$ şi $2|1$, fals 1p

Prin urmare, $m = 4$.

Subiectul II

Fie $r = \frac{a}{b}$ cu $a, \ b \in \mathbb{N}^*$ şi $(a, b) = 1$

Avem $\frac{28}{45} r = \frac{28}{45} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N}$, de unde $45b|28a$ şi $45|28a$ şi $b|28a$ (1) 1p

Cum $(45, 28) = 1$, iar $(a, b) = 1$ din (1) rezultă că $45|a$ şi $b|28$ (2p) 1p

Din $\frac{98}{75} r = \frac{98}{75} \cdot \frac{a}{b}$ rezultă că $75b|98a$ (3) 1p

Însă $(75, 98) = 1$ şi $(a, b) = 1$, atunci din (3) rezultă că $75|a$ şi $b|98$ (4) 1p

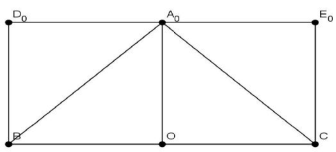
Cum $\frac{a}{b}$ trebuie să fie minim rezultă că a trebuie să fie minim posibil, iar b maxim posibil 1p

Din (2) şi (4) rezultă $a = [45, 75] = 225$ şi $b = (28, 98) = 14$ 1p

Prin urmare, $r_{min} = \frac{225}{14}$ 1p

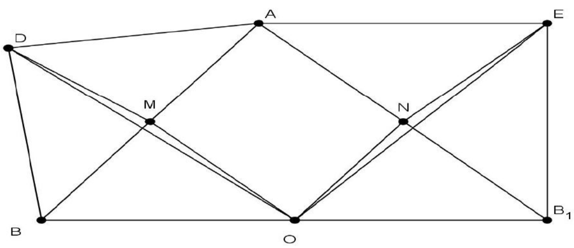
Subiectul III

Observaţie: Pentru a "intui" punctul fix prin care trec mediatoarele segmentelor variabile (DE), să



construim punctul A_0 astfel încât triunghiul A_0BC să fie dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{BA_0C}) = 90^o$. Atunci mediatorea segmentului (D_0E_0) conţine punctul O, mijlocul segmentului fixat (BC) pentru că BCE_0D_0 este dreptunghi.

Fie punctele $M, \ N$ şi O mijloacele laturilor $(AB), \ (AC)$şi respectiv (BC).



Avem $ON = \frac{AB}{2}$; $OM = \frac{AC}{2}$(teorema liniei mijlocii) 1p

$ANOM$ este paralelogram, de unde $m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{ANO})$ şi $m(\widehat{BMO}) = m(\widehat{CNO}) = m(\widehat{ABC})$

$m(\widehat{DMB}) = m(\widehat{ENC}) = 90^o$

Deci $m(\widehat{DMO}) = m(\widehat{ENO})$ 2p

$DM = \frac{AB}{2}$ şi $NE = \frac{AC}{2}$(mediana corespunzătoare unghiului drept) 091p

$\triangle OMD \equiv \triangle ONE$(L.U.L), de unde $(OD) \equiv (OE)$, adică $\triangle DOE$ este isoscel, oricare ar fi punctul $A \notin BC$ 2p

Mediatoarea laturii DE conţine punctul fix O 1p

Subiectul I

a) Fie $n+49=a^3$ şi $n-49=b^3$, unde $a\in\mathbb{N}$ şi $b\in\mathbb{Z}$

Avem $a^3-b^3=98 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=98$ (1) 1p

Cum $a>b$ din (1) rezultă $a-b\in\{1,2,7,14,49,98\}$

$a-b=1 \Rightarrow a=b+1$ şi $(b+1)^2+b(b+1)+b^2=98 \Leftrightarrow 3b^2+3b=97 \Rightarrow 3|97$, fals

$a-b=2 \Rightarrow (b+2)^2+b(b+2)+b^2=49 \Leftrightarrow b^2+2b=15 \Leftrightarrow (b+1)^2=16$, de unde $b=3$ şi $a=5$. 1p

$a-b\geq 7$, adică $a\geq b+7$ conduce la $a^2+ab+b^2\leq 14$ fals 1p

Deci $a=5, b=3$ şi $n+49=125$, adică $n=76$........ 1p b)

$\sqrt{1+2013\cdot 2015}=\sqrt{1+2013^2+2\cdot 2013}=\sqrt{(1+2013)^2}=2014$........ 1p

$\sqrt{1+2012\cdot 2014}=\sqrt{(1+2012)^2}=2013$ 1p

$\sqrt{1+2011\cdot 2013}=2012$........ 1p

$a=\sqrt{1+2010\cdot 2012}=2011$........ 1p

Subiectul II

a) $xy+yz+zx=\frac{a^2+4a+11}{2}=\frac{(x+y+z)^2-4(x+y+x)+11}{2}$ 2p

b) Relaţia precedentă se mai scrie sub forma echivalentă

$(x+y+z)^2-4(x+y+z)+11=2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$........ 1p

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+11=0$ 1p

$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4)=1 \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1 \Rightarrow$........ 1p

$\Rightarrow (x-2),\ (y-2),\ (z-2)\in[-1,1] \mid +2$

$\Rightarrow x,\ y,\ z\in[1,3]$........ 1p

Subiectul III

Soluţia 1

Se arată că patrulaterul $A'B'D'E'$ este paralelogram, de unde $E'D'||A'B'$ (1)........ 1p

Fie punctul $M\in(BB')$, astfel încât $(MB)=(DD')(=2^{2010})$.

Observăm că $2^{2013}=2^{2010}+(2^{2010}+2^{2011}+2^{2012})$, de unde rezultă că $BB'=AA'+DD'$........ 1p

Patrulaterul $MBDD'$ este paralelogram pentru că $MB||DD'$ şi $MB=DD'$. Deci $BD||MD'$ şi $MB=DD'$. Deci $BD||MD'$ şi $BD=MD'$ 1p

Însă $BD||AE$ şi $BD=AE(ABDE$ este dreptunghi).

Deci $MD'||AE$ şi $MD'=AE$, adică $AMD'E$ este paralelogram de unde $AM||D'E$ (2)........ 1p

Din $AA'=MB'$ şi $AA'||MB'$ rezultă că şi $AMB'A'$ este paralelogram, de unde $AM||A'B'$(3) 1p

Din (2) şi (3) rezultă că $D'E||A'B'$ (4) 1p

Din (1) şi (4), rezultă $E=E'$(axioma paralelor) şi $d(E,E')=0$........ 1p

Soluţia 2

Fie $B'D'\cap BD=\{M\}$, $A'D'\cap AD=\{N\}$ şi $AB\cap A'B'=\{P\}$

Avem $(A'B'D')\cap(ABD)=MN$, deci $P\in\ MN$ 1p

Arătăm că $E\in\ MN$, adică $e\cap(A'B'D')=\{E\}$

$\triangle MDD'\sim\triangle MBB'$, $\triangle NDD'\sim\triangle NAA'$ şi $\triangle PAA'\sim\triangle PBB'$(t.f.a) de unde $\frac{MD}{MB}=\frac{1}{8}$; $\frac{PA}{PB}=\frac{7}{8}$ .2p

Patrulaterul ABDE este dreptunghi cu $AE=AB\sqrt{3}$ 1p

Din $\frac{PA}{PB}=\frac{7}{8}\Rightarrow PA=7AB$ şi din $\frac{MD}{MB}=\frac{1}{8}$ rezultă $MB=\frac{8\sqrt{3}}{7}AB$........ 1p

Avem $tg(\widehat{APE})=\frac{AE}{AP}=\frac{\sqrt{3}}{7}$ şi $tg(\widehat{MPB})=\frac{\sqrt{3}}{7}$........ 1p

Deci $\widehat{APE}\equiv\widehat{MPB}$ şi $E\in MN$ iar $E=E'$ 1p