Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a V-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1. Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui $3 \cdot 2^{2009}$ la $5 \cdot 2^{2007}$.

***

Problema 2. Să se determine numărul natural a şi cifra b, dacă

$$(a+3) \cdot \overline{200b} = a \cdot 2009.$$

***

Problema 3. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul

$$1! + 4! + 7! + \cdots + (3n+1)!$$

este pătrat perfect, unde am notat $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot x$, $x \in \mathbb{N}^*$.

G.M. nr.6/2011

Problema 4. Notăm cu A cel mai mic număr natural de patru cifre distincte care este un cub perfect. Considerăm numerele $B = \overline{abc}$, $a > b > c$ alese astfel încât împărţind pe a la $b - c$, câtul şi restul sunt egale cu 2.

Găsiţi numerele B şi determinaţi toate perechile (A, B) pentru care suma dintre câtul şi restul împărţirii lui A la B este un număr divizibil cu 5.

Christina Dan

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VI-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1. Să se determine numărul natural nenul x ce satisface următoarea egalitate:

$$(400, x)^2 = [25, x] \cdot [16, x],$$

unde (a, b) şi $[a, b]$ reprezintă c.m.m.d.c-ul, respectiv c.m.m.m.c-ul, numerelor a şi b.

***

Problema 2. Fie a un număr natural astfel încât numerele $a+2, a+4, a+8, a+10, a+16$ sunt simultan prime.

Arătaţi că $x = (a+2)^n + (a+4)^n - (a-1)^n$ este divizibil cu 10, oricare ar fi n număr natural nenul.

GM 4/2011

Problema 3. Fie a un număr natural nenul cu următoarea proprietate:

oricare ar fi p un divizor prim al lui a rezultă $p+1 \mid a$.

Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr natural de trei cifre cu proprietatea de mai sus.

***

Problema 4. Se consideră unghiurile adiacente şi suplementare $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$. În semiplanul delimitat de dreapta AC care conţine punctul B, se consideră punctele M şi N astfel încât $OM \perp OA$ şi $ON \perp OB$. Dacă $m(\widehat{CON}) = 3 \cdot m(\widehat{AOB})$, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{CON}$, $\widehat{MON}$ şi $\widehat{BOM}$.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.
Arătaţi că dacă x, y sunt numere naturale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2012}$, atunci $\sqrt{(\frac{x}{4} - 503) \cdot (\frac{y}{4} - 503)}$ este număr natural.

(S:E11.281, GM 11, 2011)

Problema 2.
Fie $a < 0$. Calculaţi valoarea expresiei $E(x) = |a + x| + \sqrt{(a-1)^2} - |2a| + x$, pentru $x < |a|$.

***

Problema 3.
Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) < 60°$, iar Q un punct în interiorul triunghiului, astfel încât $\triangle\ BCQ$ este echilateral. Ştiind că $BC = 4$ cm şi $AQ = 3$ cm, aflaţi aria triunghiului AQB.

(S:E11.245, GM 10, 2011)

Problema 4.
Fie M şi N respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[CD]$ ale paralelogramului ABCD. Notăm $[DM] \cap [AC] = \{G_1\}$ şi $[BN] \cap [AC] = \{G_2\}$. Arătaţi că:

a) $[AG_1] \equiv [G_1G_2] \equiv [G_2C]$.

b) G_1 este centrul de greutate al triunghiului AMN.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VIII-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.

Arătaţi că numărul:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

este raţional.

***

Problema 2.

Rezolvaţi ecuaţia $1+[x] = [px]$, unde p este număr natural, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

GM 7-8-9/2010

Problema 3.

In planul α se consideră $ABCD$ un dreptunghi, O intersecţia diagonalelor sale şi M un punct exterior planului α. Dacă

$$MA = MB = MC = MD,$$

demonstraţi că dreapta MO este perpendiculară pe planul α.

***

Problema 4.

Fie $ABCD$ un tetraedru, iar S un punct exterior acestuia. Arătaţi că dacă SE, SF, SG, SH sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSD}$, respectiv $\widehat{DSA}$, ($E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$), atunci E, F, G şi H sunt coplanare.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.