COLEGIUL NAŢIONAL „VASILE LUCACIU” BAIA MARE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015

CLASA a IV-a

Subiectul 1.

a) În șirul 2015, *a*, 2007, *b*, *c* suma oricăror trei termeni consecutivi este aceeași. Să se calculeze *a*-*c*.

b) Pe niște bilete sunt scrise numere naturale (câte un număr pe fiecare bilet), astfel încât suma și produsul lor sunt egale cu 12. Aflați numărul biletelor. (Găsiți toate soluțiile posibile).

Gazeta Matematică

Subiectul 2

Un elev a cumpărat 8 caiete și 12 creioane pentru care a plătit 144 lei.

Un alt elev a cumpărat 10 caiete și 15 creioane de același fel cu colegul său.

a) Aflați câți lei a încasat librăria de la cei doi elevi?

b) Câți lei costă un creion dacă un caiet costă de 3 ori mai mult?

Subiectul 3.

O urna conține bile albastre și bile roșii. O persoană a inventat următorul joc: Extrage succesiv bile, una câte una, până când constată că pentru prima dată numărul bilelor albastre extrase este egal cu numărul bilelor roșii extrase. La unul dintre jocuri constată că în final au fost extrase 10 bile și că nu există trei bile de aceeași culoare extrase consecutiv. Să se arate că în această situație a cincea și a șasea bilă extrase au culori diferite.

CLASA a V-a

Subiectul 1.

Arătaţi că numărul : a = 3+9+15+21+....+12081+8058+4031, se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte consecutive.

Subiectul 2.

Determinaţi numerele prime p şi q pentru care:

$$p^2 - q^2 = 10 + 5p$$

Gazeta Matematică nr. 12/2014

Subiectul 3.

În 16 cutii sunt în total 27 bile, fiecare cutie conţinând cel puţin una şi cel mult trei bile. Numărul cutiilor ce conţin o bilă nu este mai mic decât 7, iar numărul bilelor din cutiile ce conţin două sau trei bile este mai mare decât 17. Aflaţi câte cutii conţin o bilă, două bile, respectiv trei bile.

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

Numerele $\overline{abc}$ au proprietatea $\overline{aaa}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=1221^2$.

a) Determinaţi numerele $\overline{9bc}$. **b)** Determinaţi numerele $\overline{abc}$. *R.M.T. nr. 4/2014 prelucrare*

Subiectul 2.

a) Comparaţi numerele $a=\frac{2011}{2012}+\frac{2014}{2015}$ şi $b=\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2014}$

b) Generalizare: Comparaţi numerele $a=\frac{n}{n+1}+\frac{n+3}{n+4}$ şi $b=\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n+3}, n\in\mathbf{N}^*$.

Subiectul 3.

Pe dreapta *d* alegem un punct *O* şi de aceeaşi parte a lui *O*, luăm punctele $A_1, A_2, ..., A_k$ (în această ordine) astfel încât $OA_1=1, A_1A_2=2, A_2A_3=3, ...etc.$ Pe semidreapta opusă lui $[OA_1$, considerăm punctele $B_1, B_2, ..., B_p$ (de la dreapta la stânga) astfel încât $OB_1=p, B_1B_2=p-1, B_2B_3=p-2, ...etc.$ Fie M mijlocul segmentului $[A_kB_p]$.

a) Aflaţi lungimea segmentelor $[OA_k]$ şi $[OB_p]$.

b) Aflaţi k şi p ştiind că $A_1M=3$.(toate segmentele sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură)

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a) Fie *a,b,c,x,y,z* numere reale nenule astfel încât:

$$x=bc+\frac{1}{a}, y=ac+\frac{1}{b}, z=ab+\frac{1}{c} \text{ şi } ax+by+cz=1.$$

Să se deducă o relaţie numai între *a,b,c* şi o relaţie numai între *x, y* şi *z.*

b) O foaie de dimensiune 9×9 este împărțită în 81 de pătrățele de dimensiuni 1×1 , pe care sunt scrise numerele de la 1 la 81, fiecare într-un pătrățel. Să se arate că există un pătrat de dimensiune 2×2 astfel ca suma numerelor din cele patru pătrățele să fie cel mult 198.

Subiectul 2.

Se consideră trapezul ABCD cu AB|| CD. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului, M mijlocul segmentului BC şi N mijlocul segmentului AD. Să se arate că perimetrul triunghiului MON este jumătate din perimetrul trapezului ABCD dacă şi numai dacă diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

Subiectul 3.

Se consideră o mulţime A⊂**Z** care are proprietăţile:

(1) 0∈A *(2)* dacă *a,b*∈**Z** şi 2*a*-3*b*∈A atunci *a*∈A şi *b*∈A.

Să se arate că A = **Z**. *Gazeta Matematică nr. 12/2014*

CLASA a VIII-a

Subiectul 1. Fie suma $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$.

a) Să se determine S_n.

b) Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, avem $S_n<\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}-1$?

Subiectul 2.

a) Dacă $a,b\in \mathrm{N}$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in \mathrm{N}$, să se demonstreze că $\sqrt{a}\in\mathbf{N}$ şi $\sqrt{b}\in\mathbf{N}$.

b) Determinaţi valorile lui $n\in\mathbf{N}$ pentru care $\sqrt{2009+n}+\sqrt{2009-n}\in\mathbf{N}$.

Subiectul 3.

Fie triunghiul *ABC* şi notăm $a=BC, b=AC, c=AB, a\neq b\neq c\neq a$. În vârfurile triunghiului ABC, de aceeaşi parte a planului se ridică perpendicularele $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{3}, BB'=\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $CC'=\frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Notăm cu *G* centrul de greutate al triunghiului ABC, iar cu O' centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$. Să se arate că **a)** $[GA']\equiv[GB']\equiv[GC']$ **b)** $GO'\perp(A'B'C')$

Barem **CLASA a IV-a**

Subiectul 1.

a) $a+2007+b=2007+b+c$..2p

$a=c$..1p

$a-c=0$..1p

b) 12 se poate scrie ca produs 2x6, 3x4, 2x2x3. În scrierea acestor produse se poate folosi un număr convenabil de 1..1p

Avem:

2+6+1+1+1+1; 3+4+1+1+1+1+1; 2+2+3+1+1+1+1+1..........................1p

Numărul biletelor poate fi 6,7 sau 8..1p.

Subiectul 2

a) 2 caiete şi 3 creioane costă ....144:4=36 lei........................2p

10 caiete şi 15 creioane costă.............36X5=180 lei.........................2p

În total s-a încasat .... 144+180=324 lei........................1p

b) 2 caiete costă cât 6 creioane. Atunci 1 creion costă 36:9=4lei......2p

Subiectul 3.

Începem jocul.

Cazul I. 1a,2a (altfel jocul se opreşte),3r (nu avem trei bile consecutive de aceeaşi culoare), 4a (altfel jocul se opreşte)..3p

Din acest moment avem doua sub cazuri: 5a implică 6r (altfel avem 3 bile consecutive de aceeaşi culoare sau 5r implică 6a (altfel jocul se opreşte)...2p

Cazul II este identic numai ca a devine r..1p

Continuarea jocului pană la bila a 10-a…………………………………………………1p.

Problema se poate rezolva si pornind de la bila a 10-a ,gândind la fel.

CLASA a V-a

Subiectul 1

$a=(1+3+5+...+4027)+(1+3+5+...+4027+4029)+(1+3+5+...+4027+4029+4031)=$…3p

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$ ……………………………………………………………1p

$a=2014^2+2015^2+2016^2$ …………………………………………………………………3p

Subiectul 2.

$$p^2-5p=10+q^2 \Rightarrow p(p-5)=10+q^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} p>5 \\ p-prim \end{matrix}\right\} \Rightarrow p=\text{ impar} \Rightarrow p-5=\text{par}$$ …………3p

$\Rightarrow p(p-5)=$ par $\Rightarrow 10+q^2=$ par $\Rightarrow$ q este prim şi par $\Rightarrow q=2$ ………………………………3p

$\Rightarrow p(p-5)=14 \Rightarrow p=7$ ……………………………………………………………………..1p

Subiectul 3.

În cutiile cu 2 sau 3 bile, există cel puţin 18 bile. ……………………………………………1p

În cutiile cu 1 bilă, există cel mult 27-18= 9 bile……………………………………………………2p

Numărul cutiilor ce conţin o bilă poate fi 7,8 sau 9…………………………………………..1p

<u>Caz I</u> nr. cutii 1 bilă =7 $\Rightarrow$ 7 cutii cu 2 bile şi 2 cutii cu 3 bile……………………………………1p

<u>Caz II</u> nr. cutii 1 bilă =8 $\Rightarrow$ 5 cutii cu 2 bile şi 3 cutii cu 3 bile……………………………………1p

<u>Caz III</u> nr. cutii 1 bilă =9 $\Rightarrow$ 3 cutii cu 2 bile şi 4 cutii cu 3 bile…………………………………..1p

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

a) $\overline{999}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=1221^2 \Rightarrow 81+b^2+c^2=121 \Leftrightarrow b^2+c^2=40$.

Dar $u(a^2), u(b^2), u(c^2) \in \{1,4,5,6,9\}$ $b \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow b=2, c=6$ sau invers $\Rightarrow \overline{abc} \in \{962;926\}$…3p

b) Utilizând scrierea în baza 10 şi descompunerea în factori ai lui 1221, egalitatea din enunt devine

$\overline{aaa}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=11^2 \cdot 111^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=121$

Dar $u(a^2) \in \{0,1,4,5,6,9\}$ şi cum $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow u(a^2), u(b^2), u(c^2) \in \{1,4,5,6,9\}$

1) $u(a^2)=1 \Rightarrow a \in \{1,9\}$

- $a=1 \Rightarrow b^2+c^2=120 \Rightarrow u(b^2+c^2)=0 \Rightarrow u(b^2+c^2)=u(4+6)$ sau $u(1+9)$

  Analizând toate situaţiile $u(b^2)=4, u(c^2)=6$ şi $u(b^2)=1, u(c^2)=9$ nu obţinem soluţie.

- $a=9 \Rightarrow b^2+c^2=40 \Rightarrow b=2, c=6$

  Dar ordinea în $a^2+b^2+c^2=121$ nu contează , rezultă $\overline{abc} \in \{962;926;692;629;269;296\}$

2) $u(a^2)=4$ nu mai trebuie

3) $u(a^2)=6$ nu mai trebuie

4) $u(a^2)=9$ nu mai trebuie

5) $u(a^2)=5 \Rightarrow b^2+c^2=96 \Rightarrow u(b^2) \in \{1,5\} \Rightarrow u(b^2)=1 \Rightarrow b \in \{1,9\} \Rightarrow c^2=95$ sau $c^2=15$ (fals)……………………………………………………………………………..4p

Subiectul 2.

a) $a=\frac{2011}{2012}+\frac{2014}{2015}=1-\frac{1}{2012}+1-\frac{1}{2015}=2-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2015}$

$b=\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2014}=1-\frac{1}{2013}+1-\frac{1}{2014}=2-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$

$\Rightarrow b=2-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=a+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)-\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)$

$\Rightarrow b=a+\frac{1}{2012\cdot 2013}-\frac{1}{2014\cdot 2015}>a \Rightarrow b>a$ …………………………………………………4p

b) Pentru cazul general procedam analog $a=\frac{n}{n+1}+\frac{n+3}{n+4}=2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}$

$b=2-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\left(2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$

$=a+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}>a \Rightarrow b>a$ ……………………………………………3p

Subiectul 3.

a) $OA_k=\frac{k(k+1)}{2}, OB_p=1+2+3+..+p=\frac{p(p+1)}{2}$ …………………………………2p

b) $A_kB_p=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2} \Rightarrow B_pM=\frac{k(k+1)}{4}+\frac{p(p+1)}{4}$

1) Dacă $k<p \Rightarrow M \in [OB_1$ şi $OM=OB_p-B_pM=\frac{p(p+1)}{4}-\frac{k(k+1)}{4}$

Dar $OM=A_1M-OA_1=3-1=2 \Rightarrow \frac{p(p+1)}{4}-\frac{k(k+1)}{4}=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (p-k)(p+k+1)=8 \Rightarrow k=3, p=4$ ……………………………………………………2p

2) Dacă $k>p \Rightarrow M \in [OA_1$ şi $OM=OA_k-A_kM=\frac{k(k+1)}{4}-\frac{p(p+1)}{4}$

Dar $OM=A_1M+OA_1=4 \Rightarrow (k-p)(p+k+1)=16 \Rightarrow k=8, p=7$ …………………………2p

3) $k=p$ nu convine……………………………………………………………………..1p

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a) $ax = abc + 1$, $by = abc + 1$, $cz = abc + 1$ **1p**

$ax + by + cz = 3abc + 3$, $ax + by + cz = 1 \Rightarrow abc = -\frac{2}{3}$ **1p**

$ax = abc + 1 \Rightarrow ax = \frac{1}{3}$, $analog\ by = cz = \frac{1}{3}$ **1p**

$x = \frac{1}{3a}, y = \frac{1}{3b}$, $z = \frac{1}{3c} \Rightarrow xyz = \frac{1}{27abc} \Rightarrow xyz = -\frac{1}{18}$ **1p**

b)

Din pătrat tăiem două benzi de lăţime 1, rămânând un pătrat 8×8 pe care-l împărţim în 16 pătrate de dimensiuni 2×2 ....**1p**

S-au eliminat 17 pătrăţele, deci suma numerelor din pătraţele rămase este cel mult 18+19+...+81=99· 32.

Suma numerelor din cele 16 pătrate de dimensiuni 2×2 este cel mult 99· 32 ....**1p**

Deci cel puţin unul din pătrate va avea suma numerelor cel mult $\frac{99\cdot32}{16} = 99\cdot2 = 198$ ……. **1p**

Subiectul 2.

$\Rightarrow$ Dacă AC ⊥ BD atunci △ AOD și △ BOC sunt dreptunghice în O

OM, ON mediane $\Rightarrow OM = \frac{BC}{2}$ și $ON = \frac{AD}{2}$..**1p**

MN linie mijlocie în trapez$\Rightarrow MN = \frac{AB+CD}{2}$..**1p**

$\mathcal{P}_{OMN} = OM + ON + MN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} = \frac{\mathcal{P}_{ABCD}}{2}$.. .**1p**

$\Leftarrow$ Dacă $\mathcal{P}_{OMN} = \frac{\mathcal{P}_{ABCD}}{2} \Rightarrow OM + ON + MN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow OM + ON = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$............**1p**

Dacă $m(\measuredangle AOD) = m(\measuredangle BOC) < 90^\circ$ $atunci\ ON > \frac{AD}{2}$ și $OM > \frac{BC}{2} \Rightarrow OM + ON > \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$.........**1p**

Dacă $m(\measuredangle AOD) = m(\measuredangle BOC) > 90^\circ$ $atunci\ ON < \frac{AD}{2}$ și $OM < \frac{BC}{2} \Rightarrow OM + ON < \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$..........**1p**

Deci $OM + ON = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} \Rightarrow m(\measuredangle AOD) = m(\measuredangle BOC) = 90^\circ$ **1p**

Subiectul 3.

Fie *a=3k, b=2k, k*∈**Z**.

Atunci 2*a*-3*b*=0∈A şi aplicând propritatea (2) rezultă că 3*k*∈A şi 2*k*∈A pentru orice *k*∈**Z** **3p**

În particular 3∈A.

Fie *a=3k*+3*, b=2k*+1*, k*∈**Z**.

Atunci 2*a*-3*b*=3∈A şi aplicând proprietatea (2) rezultă că 3*k*+3∈A şi 2*k*+1∈A pentru orice *k*∈**Z** **3p**

2*k*∈A ,2*k*+1∈A pentru orice *k*∈**Z**⟹ **Z** ⊂A şi **A** ⊂ **Z** , deci A= **Z** **1p**

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

a) $\frac{S_n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n+2\sqrt{n^2-1}}}$ 1p

$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}} ... + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2}}$ 1p

$= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ 1p

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} ... + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{2}$ 1p

$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 1p

b)

$S_n < \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{n+1} - 1 < 2$

$\Rightarrow \sqrt{n+1} < 3 \Rightarrow n+1 < 9 \Rightarrow n < 8$, dar $n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \Rightarrow n \in \{2,3,...,7\}$...............................2p

Subiectul 2.

a) Presupunem $a, b \in \mathbf{N}, a > b$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathrm{N}$. Putem raţionaliza şi obţine $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathrm{N}$, de unde $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathrm{N}$ 1p

De unde rezultă că $2\sqrt{a} \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}, (m,n) = 1 \Rightarrow a \cdot n^2 = m^2$

$\Rightarrow n | m^2 \Rightarrow n | m \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = n \in \mathbf{N}$

Se analizează şi cazul $a=b$…………………………………………………..2p

b) Observăm că $n = 0$ nu convine.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ deducem că $\sqrt{2009+n}$, $\sqrt{2009-n} \in \mathbf{N}$.

Notăm atunci $2009 + n = k^2, 2009 - n = p^2, k, p \in \mathbf{N}, k > p \Rightarrow k^2 + p^2 = 4018$...1p

Cum $7 | 4018$ examinăm resturile posibile ale împărţirii lui k şi p la 7. Un pătrat perfect poate da resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7, deci, pentru ca $7 | k^2 + p^2$ trebuie $7 | k$ şi $7 | p$ 1p

Atunci $k = 7a, p = 7b, a, b \in N, a > b$ şi obţinem $a^2 + b^2 = 82$ 1p

Singura varianta este $a = 9, b = 1 \Rightarrow k = 63, p = 7 \Rightarrow n = 1960$......................................1p

Subiectul 3.

a) În ΔABC avem $AG = \frac{2}{3} m_a$ şi $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$ 1p

$\Rightarrow AG^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{9}$ 1p

Aplicând T. Pitagora în $\Delta AGA'$ obţinem $GA'^2 = AA'^2 + AG^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{9} = \frac{2\left(b^2+c^2+a^2\right)}{9}$ 1p

Analog $GB'^2 = GC'^2 = \frac{2\left(b^2+c^2+a^2\right)}{9}$ 1p

Deci $[GA'] \equiv [GB'] \equiv [GC']$...1p

b) Din $[GA'] \equiv [GB'] \equiv [GC']$ şi O' centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$

$\Rightarrow GO' \perp (A'B'C')$...2p