MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI
ŞCOALA NR. 22 "B. P. HAŞDEU" IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

FLORICA T. CÂMPAN

EDIŢIA A XV-A, 28 FEBRUARIE 2015

Clasa a IV-a

Problema 1.

a) Determinați cel mai mare număr format din cifre distincte, care este mai mic decât numărul 333333.
b) Lia așază un număr de mărțișoare, în mod egal, mai întâi în 4 cutii, apoi în 5 cutii. Prima dată rămân două mărțișoare în afara cutiilor iar a doua oară rămân trei mărțișoare în afara cutiilor. Numărul mărțișoarelor din fiecare cutie este, în primul caz, cu 5 mai mare decât numărul mărțișoarelor din fiecare cutie în cel de-al doilea caz. Câte mărțișoare are Lia?

Problema 2.

În turneul de șah *Hașdeenii* au participat, la categoria 10-12 ani, un număr de 16 șahiști. Cel care pierde este eliminat din joc. În primele două runde s-au jucat câte 8 partide, în următoarele două câte 4 partide, iar în ultimele două runde s-au jucat două, respectiv o partidă, desemnându-se câștigătorul.
a) Câte partide s-au jucat în întregul turneu?
b) Ce loc a obținut jucătorul care a câștigat patru partide?

Problema 3.

Se consideră 40 de cărți de joc: patru cu valoarea 1, patru cu valoarea 2, patru cu valoarea 3, …, patru cu valoarea 10. Toate cărțile se împart la întâmplare, în mod egal, între doi jucători. Fără a se uita la cărțile pe care le are, pe rând, fiecare așază câte o carte pe masă, cu fața în sus. Dacă la un moment dat unul dintre jucători observă pe masă câteva cărți cu suma 15, el poate elimina din joc acel grup de cărți. Câștigă cel care a eliminat mai multe astfel de grupe.
Denisa și Dorel joacă acest joc. Spre final, pe masă rămâne o singură carte, cu valoarea 9. Denisa mai are în mână două cărți având valorile 3 și 5, iar Dorel are în mână o singură carte. Ce valoare are cartea din mâna lui Dorel?

Cătălin Budeanu

Clasa a V-a

Problema 1.

a) Arătați că numărul $1+3+5+...+2015$ este pătrat perfect.

b) Aflați care este ultimul termen al sumei $1+3+5+...+n$, știind că este egală cu $10\,000\,000\,000$.

Problema 2.

O pereche ordonată de numere naturale nenule (a,b) se numește *pereche specială* dacă numărul 3^a+7^b se divide cu 10.

a) Câte perechi speciale de forma $(a,2015)$, unde $a<2015$, există ?

b) Dacă (a,b) este pereche specială, arătați că și (b,a) este pereche specială .

Dorel Luchian

Problema 3.

În Fruitsland, țara lui Natural-Juice Împărat, sunt livezi cât vezi cu ochii și discuțiile tot despre pomii fructiferi se poartă. Într-o zi, în Piața Centrală din Fruitsburg, capitala țării, mai mulți piețari care vindeau portocale și mere stăteau de vorbă:

– Eu am o livadă cu portocali, care e cât un sfert din livada cu portocali a împăratului, zicea piețarul Bebe, care vindea portocale.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, spunea altul către Bebe.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, se adresa al treilea vobitorului dinaintea lui.

– Livada mea cu portocali e chiar cât a ta și toți cei care am vorbit avem la un loc exact 4000 de portocali, a cocluzionat ultimul către vobitorul dinaintea lui.

Aprins de subiectul discuției și foarte mândru de sine, Bebe a revenit și s-a lăudat:

– Eu mai am și o livadă cu meri, care e și ea cât un sfert din livada cu meri a împăratului.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, a spus altul către Bebe.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, i-a replicat altul celui de dinainte.

Și tot așa, această a doua discuție a continuat și nimeni nu mai știe câți vorbitori au fost dar se știe că, până la ultimul vorbitor, fiecare a spus că livada lui cu meri e doar jumătate cât a celui care a vorbit înaintea lui, în timp ce ultimul dintre vorbitori a zis către penultimul:

– Livada mea cu meri e chiar cât și a ta și toți cei care am vorbit acum despre livezi cu meri avem la un loc exact 4096 de meri.

a) Câți portocali sunt în livada cu portocali a lui Natural-Juice Împărat?

b) Câți meri sunt în livada cu meri a lui Natural-Juice Împărat?

Silviu Boga

Clasa a VI-a

Problema 1.

Avem la dispoziție o riglă negradată și un raportor de pe care s-au șters toate gradațiile, cu excepția celei care indică unghiul de 17°. Prezentați câte un procedeu pentru a desena unghiuri având măsurile de: **a)** 85°; **b)** 10°; **c)** 13°.

Problema 2.

Când conduce, tata merge întotdeauna cu viteza de 90 km/h atunci când drumul coboară, cu 60 km/h atunci când drumul urcă și cu 72 km/h atunci când parcurge porțiuni orizontale de drum.

Mergând în excursie la munte, tata are nevoie de cinci ore pentru a ajunge din Iași în stațiune și de patru ore pentru întoarcerea din stațiune în Iași (atât la dus, cât și la întoarcere, se merge fără opriri și pe același traseu). Determinați distanța pe care o parcurge tata dus-întors.

Problema 3.

Două supermarketuri vindeau lapte *DELICIOS* la același preț. Într-o zi de sâmbătă, au fost stabilite următoarele promoții: primul supermarket anunță o reducere de preț de 20% iar al doilea, la fiecare trei cutii cumpărate, oferă o a patra cutie gratuit. Bianca merge la primul supermarket, iar David la al doilea. Ei cumpără această marcă de lapte, luând fiecare același număr de cutii și plătind aceeași sumă totală. Câte cutii a cumpărat fiecare?

Ciprian Baghiu

Clasa a VII-a

Problema 1.

În vârfurile unui triunghi, în mijlocul fiecărei laturi precum şi în centrul său de greutate se scriu numere naturale astfel încât suma numerelor asociate oricăror trei puncte coliniare să fie 17. Câte modalităţi de scriere a numerelor există?

Problema 2.

Un pătrat de latură n este format din pătrăţele de latură 1. Parcurgem toate pătrăţelele unitate, rând cu rând, fiecare rând de la stânga la dreapta şi rândurile fiind parcurse de sus în jos. Marcăm primul pătrăţel, lasăm două nemarcate, apoi marcăm trei, lasăm patru nemarcate ş.a.m.d. O secvenţă de pătrăţele consecutive marcate sau nemarcate poate conţine pătrăţele de pe rânduri consecutive şi, dacă o secvenţă de pătrăţele care ar trebui marcate nu poate fi, în final, încheiată, se renunţă la marcarea sa.
a) Dacă pătratul desenat conţine nouă pătrăţele marcate, determinaţi latura sa.
b) Dacă pătratul desenat conţine n^2 pătrăţele marcate, $n \geq 2$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care ultima pătrăţică de pe ultimul rând este marcată.
c) Dacă pătratul desenat conţine $2k+1$ pătrăţele marcate, $k \geq 2$, demonstraţi că există un rând care are toate pătrăţelele marcate.

Claudiu-Ştefan Popa

Problema 3.

Un ţăran are o bucată de pământ de formă triunghiulară pe care trebuie să o împartă în două parcele de arii egale. Casa ţăranului (pe care o vom considera ca fiind un punct) este situată pe una dintre laturi şi trebuie să se învecineze cu ambele parcele. Arătaţi cum poate împărţi ţăranul terenul în fiecare dintre următoarele situaţii:
a) casa este mijlocul uneia dintre laturi;
b) casa nu este mijlocul niciunei laturi.

Doru Buzac

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 7}+\frac{2^3}{7\cdot 15}+\ldots+\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}<0,999$.

b) Dacă $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, calculaţi valoarea expresiei $E\left(x\right)=\sqrt{x\left(x+2\right)+1}+\sqrt{x\left(x-1\right)+\frac{1}{4}}$.

Problema 2.

Două vase, unul în formă de cub cu latura x dm şi unul în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 9 dm, lăţimea 4 dm şi înălţimea 10 dm, sunt aşezate pe o masă şi comunică în partea inferioară printr-o conductă cu capacitatea de 5 litri.
a) Dacă latura cubului este $x=8$ dm şi se toarnă în vasul cubic 505 litri de apă, aflaţi înălţimea la care se ridică apa în cele două vase.
b) Aflaţi latura cubului astfel încât, atunci când cubul este plin, cantitatea de apă din cele două vase să fie aceeaşi.

Problema 3.

Într-o ţară cu 64 de oraşe, o companie aeriană are 2000 de rute (tur-retur). Demonstraţi că, utilizând rutele companiei, din orice oraş se poate ajunge în oricare altul.

BAREM

Clasa a IV-a

SUBIECT I

a) Numărul este de forma $\overline{32abcd}$ ………………………………………………… 2p
Finalizare: numărul căutat este 329876 …………………………………………… 3p
b) Fie n numărul de mărțișoare
c numărul de mărțișoare din fiecare din cele 5 cutii
$n = 5c + 3$ …………………………………………………………………………… 2p
$n = 4(c+5)+2$ ……………………………………………………………………… 2p
$5c+3=4(c+5)+2 \Rightarrow c=19$ ……………………………………………………… 2p
$n = 98$ mărțișoare …………………………………………………………………. 2p

Oficiu 2p
Total 15p

SUBIECT II

a) Runda I – 8 remize, rămân în concurs 16 jucători;
Runda a II-a – 8 victorii, rămân în concurs 8 jucători;
Runda a III-a – 4 remize, rămân în concurs 8 jucători;
Runda a IV-a – 4 victorii, rămân în concurs 4 jucători;
Runda a V-a – 2 victorii, rămân în concurs 2 jucători;
Runda a VI-a – 1 victorie, se stabilește câștigătorul concursului ……………. 6p
În total se desfășoară $8+8+4+4+2+1=27$ ………………………………… 3p
b) Câștigătorul concursului obține victorii în rundele a doua, a patra, a cincea și a șasea adică un total de 4 victorii, prin urmare niciun alt jucător nu poate să aibă mai mult de 3 victorii …………………………………………………………………. 4p

oficiu 2p
Total 15p

SUBIECT III

Suma numerelor scrise pe toate cărțile este: $4(1+2+3+...+10)=220$ ……………..3p
Din joc au fost eliminate n grupe de cărți cu suma 15, având valoarea totală $15n$……………………………………………………………………..3p
Avem, $9+3+5+x+15n=220$ unde x este numărul cărții din mâna lui Dorel……………………………………………………………………….. 2p

Cum $x \le 10$, singura soluție convenabilă este $x=8$, $n=13$ deci cartea din mâna lui Dorel are valoarea 8………………………………………………………………5p

oficiu 2p
Total 15p

Clasa a V-a

SUBIECTUL I

a) Suma inițială, 1 + 3 + 5 + 7 +...+ 2015, are 1008 termeni 2p
Obține 1 + 3 + 5 + 7 +...+ 2015 = 1008^2 = 1.016.064, pătrat perfect 4p

b) Dacă $n = 2k+1$ obținem $1 + 3 + 5 + ... + n = (k+1)^2$ 3p
Obține $k = 99999$ 2p
Finalizare $n =$ 199.999 .... 2p

SUBIECTUL II

a) Deoarece $2015 = 4\cdot 503 + 3$, rezultă $U\left(7^{2015}\right) = 3$ 2p
Căutăm $a < 2015$, astfel încât $U\left(3^a\right) = 7$ 2p
Finalizare 503 ***perechi speciale*** 3p

b) Trebuie să demonstrăm că dacă $10 \mid \left(3^a + 7^b\right)$, atunci $10 \mid \left(3^b + 7^a\right)$ 1p
Folosind ultima cifră deducem că $10 \mid \left(3^a + 7^b\right)$, pentru următoarele perechi (a,b) 3p

a	b
4k+1	4p+1
4k+2	4p
4k+3	4p+3
4k	4p+2

Demonstrează că , în fiecare situație din cele amintite, $10 \mid \left(3^b + 7^a\right)$ 2p

SUBIECTUL III

a) Sunt 4 vorbitori. Dacă P este numărul portocalilor împăratului, cei patru vorbitori au respectiv:
$\frac{P}{4}, \frac{P}{8}, \frac{P}{16}$, respectiv $\frac{P}{16}$ portocali 4p
Atunci $\frac{P}{4} + \frac{P}{8} + \frac{P}{16} + \frac{P}{16} = 4000$ 3p
Finalizare $P = 8000$ 1p

b) Dacă M este numărul merilor împăratului, atunci numărul merilor vorbitorilor este:
$\frac{M}{2^2}, \frac{M}{2^3}, ..., \frac{M}{2^{n-1}}$, respectiv ultimul vorbitor care are $\frac{M}{2^{n+1}}$ 2p
Obține $\frac{M}{2^2} + \frac{M}{2^3} + ... + \frac{M}{2^{n+1}} + \frac{M}{2^{n+1}} = 4096$ 2p
Finalizare $M = 8192$ 1p

Barem - Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Desenăm unghiurile $\sphericalangle A_0OA_1$, $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\sphericalangle A_3OA_4$ şi $\sphericalangle A_4OA_5$, două câte două adiacente, fiecare având măsura de 17°; atunci $\sphericalangle A_0OA_5$ are măsura de 85°. ………………….……………... 5p

b) Fie $[OB$ semidreapta opusă lui A_0. Ca mai înainte, construim zece unghiuiri, două câte două adiacente, fiecare având măsura de 17°; atunci $\sphericalangle A_0OA_{10}$ are măsura de 170°, aşadar $\sphericalangle A_{10}OB$ are măsura de 10°. ……………………………………… ……………………………………….... 4p

c) Deoarece $540 = 31 \cdot 17 + 13$, dacă vom construi 31 de unghiuiri, două câte două adiacente, fiecare având măsura de 17°, $\sphericalangle A_{31}OB$ va avea măsura de 13°. ……………..…………………………… 4p

Baza …………………………….………………………………………………….…. 2p

Problema 2.

Notăm cu *a*, *b*, *c* distanţele parcurse, la dus, la vale, în deal, respectiv pe plat. La întoarcere, distanţele parcurse la vale, în deal şi pe plat vor fi *b*, *a* respectiv *c*. …………. ……………...……3p

Timpul la dus este $\frac{a}{90} + \frac{b}{60} + \frac{c}{72} = 5$ (ore). ………………………………………………..……3p

Timpul la întoarcere este $\frac{a}{60} + \frac{b}{90} + \frac{c}{72} = 4$ (ore). ……………………..………………...……...2p

Adunând cele două relaţii, obţinem $(a+b)\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{60}\right) + 2 \cdot \frac{c}{72} = 9$ (ore). Rezultă că $\frac{a+b+c}{36} = 9$, de unde $a + b + c = 324$ (km). ………………………………………………………..…………………….. 4p

Distanţa dus-întors parcursă este de 648 km. ……………………………………………………1p

Baza ……………………………………………………..………………….…2p

Problema 3.

Notăm cu *n* numărul de cutii cumpărate de fiecare şi cu *x* preţul iniţial al unei cutii. …...................1p

Din ipoteza problemei, obţinem că $80\% \cdot nx = \frac{3}{4}(n - r)x + rx$, unde *r* este restul împărţirii lui *n* la 4.

…………………………………………………………………………………………..…………...5p

Deducem că $n = 5r$ şi $r \in \{1, 2\}$. ………………………………………………………………… 4p

În concluzie, $n \in \{5, 10\}$. ………………………………………………………………………… 3p

Baza ……………………………………………..……………………….…2p

CLASA A VII-A

SUBIECTUL I (15 puncte)

Notează de exemplu numerele din vârfuri cu *a,b,c* şi cel din centrul de greutate cu *n*.
Obţine relaţiile $a+n=b+c,\ b+n=a+c,\ c+n=a+b$ ……………………………………………………**3p**
Scade două dintre ele şi obţine $a-b=b-a$, deci $a=b$ şi $n=c$ ……………………………………**3p**
Deci $a=b=c=n$ ……………………………………………………………………………………**2p**
În mijloace numerele au forma $17-2n$ ……………………………………………………………**2p**
Condiţia $17-2n\geq 1$, implică $n\leq 8$ ……………………………………………………………**2p**
Finalizare: 9 moduri de completare………………………………………………………………**1p**
Oficiu ……………………………………………………………………………………………**2p**

SUBIECTUL II (15 puncte)

a)Obţine pătratul cu 16 pătrăţele şi pătratul cu 25 pătrăţele ……………………………………**3p**
b) Dacă numărăm pătrăţelele după regula din enunţ, obţinem suma:
$1+2+3+.......+(2k)+(2k+1)=(k+1)(2k+1),\ k\geq 1$ ………………………………………………**2p**
$(k+1)(2k+1)=n^2$ ……………………………………………………………………………………**1p**
Cel mai mic număr *k* pentru care $(k+1)(2k+1)$ este pătrat perfect este 24…………………………**1p**
n=35……………………………………………………………………………………………………**1p**
c) n^2 impar implică *n* impar, $n\geq 2$ …………………………………………………………**1p**
Dacă $n=2p+1,\ p\geq 1$ primele *p* rânduri au $p(2p+1)$ pătrăţele……………………………………**1p**
$p(2p+1)=1+2+3+...+(2p)$, deci ultima pătrăţică de pe rândul *p* este nemarcată……………………**2p**
Rândul al *(p+1)*-lea conţine *2p+1* pătrăţele, toate marcate…………………………………………**1p**
Oficiu……………………………………………………………………………………………**2p**

SUBIECTUL III (15 puncte)
a). Fie *D* mijlocul laturii $[AB]$.
Arată că $A_{\Delta ADC}=A_{\Delta BDC}$, deci $[DC]$ este segmentul cerut………………………………………**3p**
b). Fie $P\in[AB],\ P\neq D$ punctul în care se află casa. Construim $DE \parallel PC,\ E\in[AC]$………………**3p**
PDEC este trapez, şi demonstrează că $A_{\Delta PDE}=A_{DEC}$ ……………………………………………**3p**
$$A_{\Delta APE}=A_{\Delta ADE}+A_{\Delta PDE}=A_{\Delta ADE}+A_{\Delta DEC}=A_{\Delta ADC}=\frac{A_{\Delta ABC}}{2}$$ ……………………………………**3p**
Deci [PE] este segmentul cerut……………………………………………………………………**1p**
Oficiu ……………………………………………………………………………………………**2p**

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1. a) Utilizează $\frac{2^k}{(2^k-1)(2^{k+1}-1)}=\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^{k+1}-1}$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$, $k\neq0$.................2p

   obține $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<0{,}999$...2p

   $2^{n+1}<1001$, $\Rightarrow n+1\leq9$...2p

   $n\in\{1,2,\ldots8\}$...1p

   b) $\sqrt{x(x+2)+1}=|x+1|$, $\sqrt{x(x-1)+\frac{1}{4}}=|x-\frac{1}{2}|$...2p

   $-1\leq x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow x+1\geq0$, $x-\frac{1}{2}\leq0$...2p

   $E(x)=x+1+\frac{1}{2}-x=\frac{3}{2}$...2p

   Oficiu...2p

2. a)Află cantitatea de apă rămasă în vase: 500l..1p
   Aplică principiul vaselor comunicante și notează cu h inalțimea comună......................2p

   V apă cub = 8^2h, V apă p.d= 36h..2p

   Obține: 64h+36h = 500 , h=5dm...2p

   a) V apă cub=l^3, V apă pd = 36l...2p
   l^3=36l..2p

   l = 6 dm...2p

   Oficiu 2p

3. Pp că există un oraș A din care nu se poate ajunge in unele orașe.
   Fie M_A mulțimea orașelor în care se poate ajunge din A, inclusiv A și N_A, mulțimea

   celorlalte orașe...3p

   Fie n numărul orașelor din M_A, $1\leq n<64$ și 64-n numărul orașelor din N_A........................3p

   În M_A sunt cel mult $\frac{n(n-1)}{2}$ rute și în N_A sunt cel mult $\frac{(64-n)(63-n)}{2}$ rute..........................3p

   Numărul rutelor: $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(64-n)(63-n)}{2}=n^2-64n+32\cdot63=$

   $(n-32)^2+992\leq31^2+992=1953<2000$...3p

   Presupunerea făcută este falsă, rezultă concluzia..1p

   Oficiu 2p