Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a XII-a, 21 martie 2015
CLASA a V-a

1. Să se determine numerele $\overline{ab}$ scrise în baza 10, aşa încât $\overline{ab} = a^b + \overline{ba}$.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ este divizibil cu numerele prime $\overline{ab}$ şi $\overline{ba}, a \neq b \}$.

a. Arătaţi că $2015 \in A$.

b. Câte numere naturale de patru cifre are A?

Prof. Florin Smeureanu , Râmnicu-Vâlcea

3. Determinați numărul submulțimilor M cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ astfel încât produsul elementelor mulțimii M să aibă ultima cifră 0.

Prof. Daniela și Cătălin Stănică, Brăila

4. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 99. La primul pas se şterg două numere şi se scrie pe tablă suma celor două numere șterse. La pasul următor se procedează analog, și așa mai departe.

a. Este posibil ca repetând acest procedeu, pe tablă să fie scrise la un moment dat 49 de numere divizibile cu 5? Justificați răspunsul.

b. După câţi paşi rămâne pe tablă scris un singur număr?

c. Determinați ultimul număr care rămâne scris pe tablă.

Prof. Daniela și Cătălin Stănică, Brăila

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a XII-a, 21 martie 2015
CLASA a VI-a

1. a. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}^*, x \neq y \neq z$, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}} = \frac{x+y}{y+z}.$$

Ing. Marius Olteanu, Râmnicu- Vâlcea

b. Dacă numerele n şi $14n^2+1$ sunt prime, arătaţi că numărul $14n^2+3n+2$ este prim.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie numerele naturale cu proprietatea că împărțite la 5, 6 și 11 dau resturile 4, 0, respectiv 2.

a. Determinaţi ultima cifră a acestor numere.

b. Găsiţi toate numerele de patru cifre, mai mici decât 2015, care îndeplinesc aceste condiții.

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu-Vâlcea

3. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încât:

$$\frac{\overline{ab5}}{5-c} + \frac{\overline{a7c}}{70-10b} + \frac{\overline{9bc}}{900-100a} = 962,04.$$

Prof. Daniela și Cătălin Stănică, Brăila

4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC. Arătați că:

$$AH = BC \Leftrightarrow m(\sphericalangle BAC) = 45^0$$

Gazeta matematică

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a XII-a, 21 martie 2015
CLASA a VII-a

1. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că:

$$\sqrt{a}+\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}+2.$$

Prof. Daniela şi Cătălin Stănică, Brăila

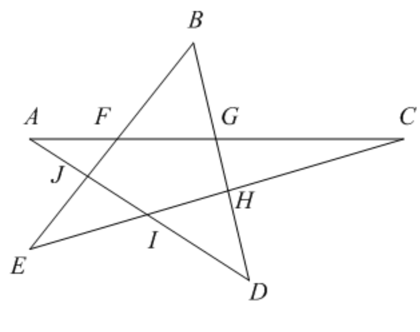
2. Pe o foaie sunt scrise n numere naturale, $n \geq 2$. Alături de acestea se mai scriu pe foaie, sumele a oricăror două dintre numerele iniţiale.

a. Determinaţi câte numere sunt scrise în total pe foaie.

b. Determinaţi n ştiind că $\sqrt{8m+1}=2015$, unde m reprezintă totalul numerelor de pe foaie.

Prof. Dumitru Dobre, Râmnicu-Vâlcea

3. În pentagonul stelar $ABCDE$ se consideră punctele F,G,H,I,J intersecţiile laturilor care îndeplinesc condiţiile: $[AG]\equiv[GC],[BH]\equiv[HD],[DI]\equiv[IA],[CH]\equiv[HE]$. Demonstraţi că J şi F împart segmentul $[BE]$ în trei segmente congruente.



Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

4. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele $P,Q\in(AC)$ astfel încât $AP=PQ=QC$. Avem $PT\perp DC, T\in(DC), QS\perp AD, S\in(AD)$ şi $PT\cap QS=\{M\}$. Demonstraţi că $DM\perp AC \Leftrightarrow ABCD$ romb.

Prof. Daniela şi Cătălin Stănică, Brăila

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a XII-a, 21 martie 2015
CLASA a VIII-a

1.a. Arătați că: $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}, (\forall) a,b \in \mathbb{R}$.

b. Dacă $x, y > 0$, arătați că:

$$\frac{x^3}{4x^2+(x+y)^2}+\frac{y^3}{4y^2+(x+y)^2} \geq \frac{x+y}{8} .$$

Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu -Vâlcea
Prof. Lucian Tuțescu, Craiova

2. a. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Arătați că:

$$\min\left(3b-a^2, 3c-b^2, 3a-c^2\right) \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2}$$

Prof.Constantin Bărăscu, Râmnicu- Vâlcea

b. Aflați numerele întregi n, știind că $\sqrt{n^2+7n+6} \in \mathbb{N}$.

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu- Vâlcea

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ avem G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $AA'B$, $BB'C'$ şi $A'D'C'$. Dacă $G_1G_2 \cap (ABC) = \{S\}$, $G_1G_3 \cap (ABC) = \{T\}$ şi $AB = 6cm$, atunci calculați aria triunghiului AST.

Prof. Daniela şi Cătălin Stănică, Brăila

4. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât în intervalul $(-\infty, 2x+3) \cap (x+1, +\infty)$ să fie un singur număr întreg.

Prof.Constantin Bărăscu , Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XII-a, 21 martie 2015

BAREM CLASA a V-a

1. $9a-9b=a^b$ 1p

$a^b \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow a \in \{3,6,9\}$ 2p

$a=3 \Rightarrow 9-3b=3^{b-1} \Rightarrow b=2$

....1p

$a=6 \Rightarrow 54-9b=6^b \Rightarrow b=2$ 1p

$a=9 \Rightarrow 9-b=9^{b-1}\,(F)$ 1p

$\overline{ab} \in \{32,62\}$ 1p

Total = 7 puncte

2. a. $2015=5\cdot 13\cdot 31 \Rightarrow 2015 \vdots 13, 2015 \vdots 31$ 1p

b. $\overline{ab},\overline{ba}$ prime $\Rightarrow \overline{ab} \in \{13,17,37,79\}$ 1p

$\overline{abcd}=13\cdot 31\cdot k$ şi $1000 \le 13\cdot 31\cdot k \le 9999 \Rightarrow 3 \le k \le 24 \Rightarrow$ 22 numere..1p

analog $1000 \le 17\cdot 71\cdot p \le 9999 \Rightarrow 1 \le p \le 8 \Rightarrow 8$ numere..1p

$1000 \le 37\cdot 73\cdot y \le 9999 \Rightarrow 1 \le y \le 3 \Rightarrow 3$ numere..1p

$79\cdot 97\cdot t \le 9999 \Rightarrow t \le 1 \Rightarrow 1$ număr.. 1p

22+8+3+1=34 numere..1p

Total = 7 puncte

3. Fie $M=\{a,b,c\}$ pentru care $u(a\cdot b\cdot c)=0$

$a=5, b=2 \Rightarrow c \in \{1,3,4,6,7,8,9,10\} \Rightarrow 8$ submulțimi 1p

$a=5, b=4 \Rightarrow c \in \{1,3,6,7,8,9,10\} \Rightarrow 7$ submulțimi 1p

$a=5, b=6 \Rightarrow c \in \{1,3,7,8,9,10\} \Rightarrow 6$ submulțimi 1p

$a=5, b=8 \Rightarrow c \in \{1,3,7,9,10\} \Rightarrow 5$ submulțimi 1p

$a=10 \Rightarrow$ 36 submulțimi..2p

8+7+6+5+36-4=58 submulțimi..1p

Total = 7 puncte

4. a. Sumele 1+99, 2+98, 3+97, ...,49+51 ne asigură 49 numere divizibile cu 5. Pe tablă mai este şi numărul 50, deci vom avea 50 numere divizibile cu 5. Dacă mai însumăm oricare două dintre cele 50 de numere vom obține 49 numere divizibile cu 5.................3p

b. După 98 paşi rămâne pe tablă un număr..2p

c. Suma 1+2+3+...+99 rămâne invariantă la ştergera a două numere şi înlocuirea cu suma lor, deci ultimul număr de pe tablă este 4950..2p

----

Total = 7 puncte

BAREM CLASA a VI-a

1. a. $\overline{xy}\left(y+z\right)=\overline{yz}\left(x+y\right)\Rightarrow xz=y^2$ ……………………………………………….….1p

$xz=pp, x\neq z\Rightarrow xz\in\{4,9,16,36\}$ 1p

$(x,y,z)\in\{(1,2,4),(4,2,1),(1,3,9),(9,3,1),(2,4,8),(8,4,2),(4,6,9),(9,6,4)\}$..............2p

b. Pentru n=2 numărul $14n^2+1$ este compus, iar pentru n=3 numărul $14n^2+1$=127 este prim……………………………………………………………………………..….1p

Numerele prime $n\geq 5$ sunt de forma 6k+1 sau 6k+5. Pentru aceste forme $14n^2+1$ este divizibil cu 3, deci este compus…………………………………………………………1p

n și $14n^2+1$ sunt prime doar pentru $n=3\Rightarrow 14n^2+3n+2=137$ 1p

Total = 7 puncte

2. a. Fie n=5x+4, n=6y, n=11z+2..1p

n=6$y\Rightarrow n$= nr. par, deci $u\left(5x+4\right)=4\Rightarrow u\left(n\right)=4$ ………………………………...…2p

b. $n=\overline{abc4}=5x+4=6y=11z+2\Rightarrow 10\cdot\overline{abc}=5x=6y-4=11z-2$

$5x=6y-4\Rightarrow y=5k+4, k\in\mathbb{N}$

$5x=11z-2\Rightarrow z=5t+2, t\in\mathbb{N}$

$10\cdot\overline{abc}=30k+20=55t+20$, cum $[30,55]=330\Rightarrow 10\cdot\overline{abc}=330r+20, r\in\mathbb{N}^*$ 2p

$1000\leq 330r+20<2015\Rightarrow 3\leq r\leq 6$ 1p

$\overline{abcd}\in\{1014,1344,1674,2004\}$...1p

Total = 7 puncte

3.

$$\frac{\overline{ab5}}{5-c}-1+\frac{\overline{a7c}}{70-10b}-1+\frac{\overline{9bc}}{900-100a}-1=959,04\Leftrightarrow\frac{\overline{abc}}{5-c}+\frac{\overline{abc}}{70-10b}+\frac{\overline{abc}}{900-100a}=959,04$$

$\overline{abc}\left(\frac{1}{5-c}+\frac{1}{70-10b}+\frac{1}{900-100a}\right)=959,04$ ……………………………………..……3p

$\frac{1}{5-c}\leq 1, \frac{1}{70-10b}\leq\frac{1}{10}, \frac{1}{900-100a}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{1}{5-c}+\frac{1}{70-10b}+\frac{1}{900-100a}\leq 1,11$ 2p

$\overline{abc}\left(\frac{1}{5-c}+\frac{1}{70-10b}+\frac{1}{900-100a}\right)\leq\overline{abc}\cdot 1,11\Leftrightarrow 959,04\leq\overline{abc}\cdot 1,11\Leftrightarrow 864\leq\overline{abc}$ 1p

Cum $a\in\{1,2,...,8\}, b\in\{0,1,...,6\}, c\in\{0,1,2,3,4\}$ egalitatea are loc pentru $a=8, b=6, c=4$, deci $\overline{abc}=864$ ……………………………………………………1p

Total = 7 puncte

4. Fie $CH\cap AB=\{E\}$

$\sphericalangle EAH\equiv\sphericalangle ECB$ deoarece au același complement...1p

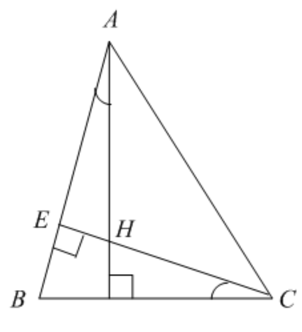
$"\Rightarrow"\ \Delta BEC\equiv\Delta AHE\left(IU\right)\Rightarrow EC=EA$ 2p

ΔEAC dr. isoscel $\Rightarrow m\left(\sphericalangle EAC\right)=45^0$ 1p

$"\Leftarrow"\ m\left(\sphericalangle EAC\right)=m\left(\sphericalangle ACE\right)=45^0\Rightarrow\Delta EAC$ isoscel $\Rightarrow EA=EC$ 1p

$\Delta BEC\equiv\Delta AEH\left(CU\right)\Rightarrow AH=BC$ 2p

Total = 7 puncte



BAREM CLASA a VII-a

1. $a, \overline{ab}, \overline{abc} = pp \Rightarrow \overline{ab} \in \{16, 49\}$ ……………………………………………………3p

$\overline{ab} = 16 \Rightarrow \sqrt{\overline{16c}} = 13 \Rightarrow \overline{16c} = 169$ 2p

$\overline{ab} = 49 \Rightarrow \sqrt{\overline{47c}} = 42\left(F\right)$...2p

Total = 7 puncte

2. a. Pe foaie se mai scriu $\left(n-1\right)+\left(n-2\right)+...+1 = \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$ sume……………………..2p

$n + \dfrac{n\left(n-1\right)}{2} = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$ numere scrise în total pe foaie...2p

b. $\sqrt{8 \cdot \dfrac{n\left(n+1\right)}{2} + 1} = 2n+1$ …………………………………………………………2p

$n = 1007$ .... 1 p

Total = 7 puncte

3. $DCBE$ paralelogram $\Rightarrow DC \parallel BE, DC = BE$ ……………………………………...…1p

IG linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow IG \parallel DC, IG = \dfrac{DC}{2}$ ………………………………………1p

IG linie mijlocie în $\Delta HEB \Rightarrow BG = GH$ 2p

$\Delta FBG \sim \Delta GDC \Rightarrow \dfrac{FB}{DC} = \dfrac{BG}{GD}$ 1p

$\Delta HGI \sim \Delta HDC \Rightarrow \dfrac{HG}{HD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{HG}{GD} = \dfrac{1}{3}$ 1p

$\dfrac{FB}{DC} = \dfrac{HG}{GD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow FB = \dfrac{DC}{3} = \dfrac{BE}{3}$,analog $EJ = \dfrac{BE}{3}$ ……..1p

Total = 7 puncte

4. "$\Rightarrow$"

Fie $AE \perp CD, CF \perp AD, AE \cap CF = \{H\} \Rightarrow H$ ortocentrul triunghiului ACD, deci $H \in DM$ ………………………………………………………………………………..2p

Notăm $AE \cap QS = \{R\}, CF \cap PT = \{G\}$

$QR \parallel CH \Rightarrow \dfrac{HR}{RA} = \dfrac{1}{2}, PG \parallel AH \Rightarrow \dfrac{HG}{GC} = \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{HR}{RA} = \dfrac{HG}{GC} \Rightarrow RG \parallel AC \Rightarrow DM \perp RG$

$RHGM$ paralelogram cu diagonalele perpendiculare $\Rightarrow RHGM$ romb..........................1p

$HR = HG \Rightarrow HA = HC \Rightarrow \Delta HAC$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle HAC \equiv \sphericalangle HCA$

$\Delta AEC \equiv \Delta ACF\left(IU\right) \Rightarrow AE = CF$ 1p

$\Delta AED \equiv \Delta CFD\left(CU\right) \Rightarrow AD = DC \Rightarrow ABCD$ romb...1p

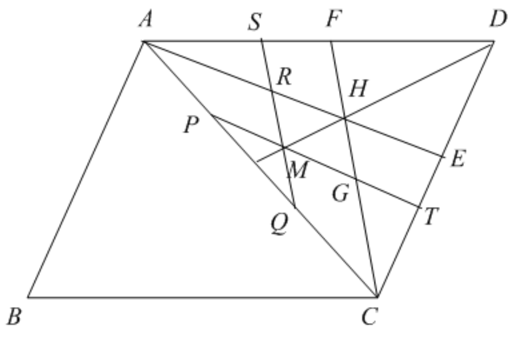
"$\Leftarrow$"

$\Delta PCT \equiv \Delta QSA\left(IU\right) \Rightarrow \sphericalangle TPQ \equiv \sphericalangle SQM, PT = SQ$ 1p

ΔPMQ isoscel $\Rightarrow MP = MQ$

$\Delta SMD \equiv \Delta TMD \Rightarrow \sphericalangle SDM \equiv \sphericalangle TDM \Rightarrow DM$ bisectoare în ΔADC isoscel, deci DM înălțime...1p

Total = 7 puncte



BAREM CLASA a VIII-a

1.a. $2a^2+2b^2 \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0\,(A),(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ 1p

b. $(x+y)^2 \le 2x^2+2y^2 \Rightarrow 4x^2+(x+y)^2 \le 6x^2+2y^2 \Rightarrow \dfrac{x^3}{4x^2+(x+y)^2} \ge \dfrac{x^3}{6x^2+2y^2}$ 2p

analog $\dfrac{y^3}{4y^2+(x+y)^2} \ge \dfrac{y^3}{6y^2+2x^2}$ 1p

$\dfrac{x^3}{4x^2+(x+y)^2}+\dfrac{y^3}{4y^2+(x+y)^2} \ge \dfrac{x^3}{6x^2+2y^2}+\dfrac{y^3}{6y^2+2x^2}$ 1p

Arătăm că $\dfrac{x^3}{6x^2+2y^2}+\dfrac{y^3}{6y^2+2x^2} \ge \dfrac{x+y}{8} \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{6x^2+2y^2}-\dfrac{x}{8}+\dfrac{y^3}{6y^2+2x^2}-\dfrac{y}{8} \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x^2-y^2)}{3x^2+y^2}+\dfrac{y(x^2-y^2)}{3y^2+x^2} \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^4(x+y) \ge 0\,(A),(\forall)x,y\in\mathbb{R}^+$ 2p

2. a.

$"\Rightarrow"$ $3b-a^2 \ge \dfrac{9}{4}, 3c-b^2 \ge \dfrac{9}{4}, 3a-c^2 \ge \dfrac{9}{4}$ 1p

Însumând cele trei inegalități obținem $(2a-3)^2+(2b-3)^2+(2c-3)^2 \le 0$ 1p

$2a-3=0 \wedge 2b-3=0 \wedge 2c-3=0 \Rightarrow a=b=c=\dfrac{3}{2}$ 1p

$"\Leftarrow"$ $a=b=c=\dfrac{3}{2} \Rightarrow 3b-a^2=3c-b^2=3a-c^2=\dfrac{9}{4} \Rightarrow \min\left(3b-a^2,3c-b^2,3a-c^2\right)=\dfrac{9}{4}$ 1p

b. $n^2+7n+6=k^2, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (2n+7-2k)(2n+7-2k)=25$ 1p

Se obțin patru sisteme de două ecuații cu necunoscutele n și k
$\Rightarrow n\in\{-10,-6,-1,3\}$ 2p

3. Fie $G_1M \perp AB, M\in(AB), G_3F \perp (ABC), F\in(ABC), G_2E \perp BC, E\in(BC)$

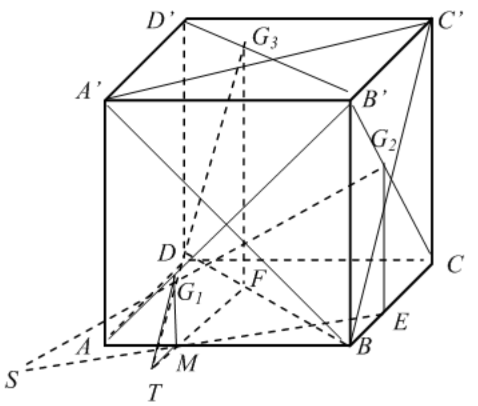
$\dfrac{G_1M}{G_2E}=\dfrac{SM}{SE} \Rightarrow \dfrac{SM}{SE}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow SM=ME=2\sqrt{5}cm$ 2p

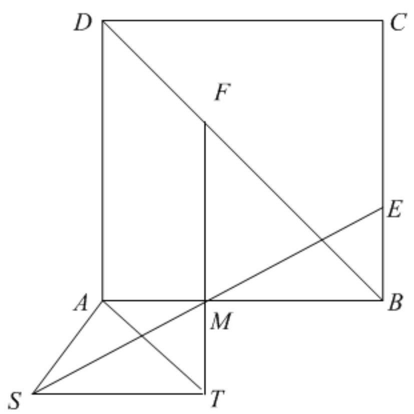
$\dfrac{G_1M}{G_3F}=\dfrac{TM}{TF} \Rightarrow \dfrac{TM}{TF}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{TM}{MF}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow TM=2cm$ 2p

$A_{\Delta ASM}=\dfrac{AM\cdot SM\cdot \sin\sphericalangle AMS}{2}=\dfrac{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sin\sphericalangle EMB}{2}=2cm^2$ 1p

$A_{\Delta TSM}=\dfrac{TM\cdot SM\cdot \sin\sphericalangle SMT}{2}=\dfrac{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sin\sphericalangle FME}{2}=4cm^2$ 1p

$A_{\Delta SAT}=A_{\Delta SAM}+A_{\Delta SMT}-A_{\Delta AMT}=4cm^2$ 1p





4. Fie $I=\left(x+1,2x+3\right)\Rightarrow x+1<2x+3\Rightarrow x>-2$

Dacă $2x+3-\left(x+1\right)>2$ în interval sunt cel puțin două numere întregi, deci

$card\left(I\cap\mathbb{Z}\right)=1\Rightarrow 2x+3-\left(x+1\right)\le 2\Rightarrow x\le 0$,

deci $x\in\left(-2,0\right]$ 2p

Reprezentăm grafic funcțiile $y=x+1$ și $y=2x+3$ pe intervalul $\left(-2,0\right]$ și analizăm următoarele cazuri:

$x\in\left(-2;-1,5\right)\Rightarrow -1<x+1<2x+3<0$

$x=-1,5\Rightarrow -1<x+1<2x+3=0$ 1p

$x\in\left(-1,5;-1\right)\Rightarrow -1<x+1<0<2x+3<-1$

$x=-1\Rightarrow 0=x+1<2x+3=1$ ………………...1p

$x\in\left(-1;-0,5\right)\Rightarrow 0<x+1<1<2x+3<2$

$x=-0,5\Rightarrow 0<x+1<1<2x+3=2$ …………..1p

$x\in\left(-0,5;0\right)\Rightarrow 0<x+1<1<2<2x+3$

$x=0\Rightarrow 1=x+1<2<2x+3=3$ 1p

Deci $x\in\left(-1,5;-1\right)\cup\left(-1;-0,5\right)\cup\left\{0\right\}$ ……..…1p