Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XIII-a, 26 februarie 2015
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

ENUNȚURI

Clasa a V-a

1. a) Determinați cel mai mic număr natural care începe cu 2015, se termină cu 2015 şi are suma cifrelor 2015.

b) De câte ori se foloseşte cifra 7 în scrierea tuturor numerelor naturale mai mici ca 2015?

2. Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural p impar și nedivizibil cu 3, există un număr natural m astfel încât $p^2 = 24m + 1$.

3. Arătați că numărul $a = \overline{\underbrace{44...4}_{2014 \text{ de } 4}5}^2 + \overline{\underbrace{11...1}_{2015 \text{ de } 1}} - 10^{2015}$ este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Se consideră unghiurile distincte $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$, cu interioarele nedisjuncte, ambele având măsurile de 60°. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{1,\ 11,\ 111,\ \dots,\ \underbrace{11..11}_{19 \text{ de } 1}\right\}$.

a) Arătați că mulțimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi disjuncte având aceeaşi sumă a elementelor.

b) Demonstrați că mulțimea A nu conține multipli de 121.

c) Arătați că mulțimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi disjuncte având acelaşi produs al elementelor.

Cătălin Ciupală

3. a) Se consideră numărul natural $n \geq 3$ şi numărul $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Arătați că fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.

b) Determinați suma fracțiilor ireductibile din mulțimea $\left\{\frac{1}{2015}, \frac{2}{2015}, \dots, \frac{2014}{2015}\right\}$.

Clasa a VII-a

1. Determinați fracțiile ireductibile $\frac{a}{b}$ care se scriu sub formă zecimală ca fracții periodice, cu zecimala de pe poziția b egală cu b.

Gabriel Popa

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi iar M şi N mijloacele laturilor BC respectiv AD. Dacă P este un punct pe semidreapta $(CD$ care nu aparține segmentului $[CD]$ şi Q este intersecția dintre PN şi AC, demonstrați că MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle QMP$.

3. Determinați numerele prime p şi q cu proprietatea că $p^2 + q = 201q^2 + p$.

Titu Zvonaru

Clasa a VIII-a

1. Se consideră segmentele OA, OB şi OC, două câte două perpendiculare. Notăm cu M şi cu N proiecțiile punctului O pe dreptele AB respectiv BC. Arătați că unghiurile $\sphericalangle OAN$ şi $\sphericalangle OCM$ sunt congruente dacă şi numai dacă segmentele AB şi BC sunt congruente.

Gabriel Popa

2. Se consideră mulțimile

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in (0,1) \right\} \text{ şi } B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \right\}.$$

a) Arătați că $A = (0, +\infty)$.

b) Demonstrați că cele două mulțimi sunt egale.

Gabriel Popa

3. Cinci numere reale pozitive au proprietatea că, dacă din suma oricăror trei se scade suma celor două rămase, diferența obținută este pozitivă. Demonstrați că produsul tuturor celor zece astfel de diferențe nu este mai mare decât pătratul produsului celor cinci numere inițiale.

SOLUȚII Clasa a V-a

1. a) Numărul căutat este $2015\underbrace{99...9}_{222 \text{ de } 9}2015$.

b) Cifra 7 se folosește de 100 + 100 + 100 (ca cifră a unităților, ca cifră a zecilor respectiv ca cifră a sutelor), deci de 300 ori în numerele mai mici ca 1000. În numerele de forma $\overline{1abc}$, cifra 7 se folosește tot de 300 ori. În total, cifra 7 se folosește de 300 + 300 + 1 = 601 ori.

2. Deoarece p este număr impar și nedivizibil cu 3, rezultă că $p=6k+1$ sau $p=6k+5$, $k\in\mathbb{N}$. Trebuie să arătăm că numărul $m=\frac{p^2-1}{24}$ este natural. Dacă $p=6k+1$, atunci $m=\frac{36k^2+12k+1-1}{24}=\frac{k(3k+1)}{2}\in\mathbb{N}$. Dacă $p=6k+5$, atunci $m=\frac{36k^2+60k+25-1}{24}=$ $=\frac{k(3k+5)+2}{2}\in\mathbb{N}$.

3. Avem: $a=\left(\underbrace{44...4}_{2015 ori}+1\right)\cdot\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{11...1}_{2015 ori}-10^{2015}=\underbrace{44...4}_{2015 ori}\cdot\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{11...1}_{2015 ori}-10^{2015}=$

$=\underbrace{44...4}_{2015 ori}\cdot\left(\underbrace{44...4}_{2015 ori}+1\right)+\underbrace{55...5}_{2014 ori}6-10^{2015}=\underbrace{44...4}_{2015 ori}{}^2+\underbrace{44...4}_{2015 ori}+\underbrace{55...5}_{2014 ori}6-10^{2015}=\underbrace{44...4}_{2015 ori}{}^2+1\underbrace{00...0}_{2015 ori}-$

$-10^{2015}=\underbrace{44...4}_{2015\text{ ori}}{}^2$, deci a este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Notăm cu $(OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ și cu $(ON$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$. Există două situații fundamental disticte:

- $C\in\text{Int}(\sphericalangle AOB)$, $A\in\text{Int}(\sphericalangle COD)$, $A,C\in\text{Int}(\sphericalangle BOD)$; atunci $m(\sphericalangle BON)=$ $\frac{1}{2}m(\sphericalangle BOD)=\frac{1}{2}\left(120^0-m(\sphericalangle AOC)\right)=60^0-m(\sphericalangle AOM)=m(\sphericalangle BOM)$, deci semidreptele $(OM$ și $(ON$ coincid. Rezultă că $m(\sphericalangle MON)=0^0$.
- $C\in\text{Int}(\sphericalangle AOB)$, $B\in\text{Int}(\sphericalangle COD)$, $B,C\in\text{Int}(\sphericalangle AOD)$; atunci $m(\sphericalangle MON)=$ $=m(\sphericalangle BON)+m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle COM)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle BOD)+m(\sphericalangle BOC)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle COA)=$ $=\frac{1}{2}\left(m(\sphericalangle AOD)+m(\sphericalangle BOC)\right)=\frac{1}{2}\left(m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle DOC)\right)=60^0$.

2. a) Dacă scrierea ar fi posibilă, suma tuturor elementelor din A ar trebui să fie număr par, contradicție.

b) Observăm că $\underbrace{11..11}_{n \text{ de} 1}\vdots 11\Leftrightarrow\underbrace{1-1+1-1+...}_{n\text{ cifre de }1}\vdots 11\Leftrightarrow n$ număr par. Pentru $n=2k$, avem că $\underbrace{11..11}_{n\text{ de} 1}=11\cdot\underbrace{1010..01}_{2k-1\text{ cifre}}$, deci $\underbrace{11..11}_{n\text{ de} 1}\vdots 121$ dacă și numai dacă $k\vdots 11$. În cazul nostru, $k_{\max}=9<11$, contradicție.

c) Presupunem că ar exista două submulțimi X și Y cu proprietățile din enunț. Ținând cont de punctul b), numărul multiplilor de 11 din X va fi egal cu numărul multiplilor de 11 din Y, ceea ce este imposibil: în mulțimea A sunt 9 numere divizibile cu 11.

3. a) Se arată că $(n-k,n)=(k,n)$, de unde cerința.

b) Observăm că fracțiile ireductibile $\frac{k}{n}$ și $\frac{n-k}{n}$ sunt distincte. Notăm cu S suma cerută; atunci $2S=\underbrace{1+1+...+1}_{p\text{ cifre de }1}$, unde p este numărul numerelor mai mici ca 2015, prime cu 2015.

Avem că $p=\varphi(2015)=2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)=1440$, deci $S=720$.

Clasa a VII-a

1. Este suficient să determinăm fracțiile subunitare ireductibile $\frac{a_0}{b}$, soluția generală a problemei fiind $\frac{a_0+nb}{b}$, cu $n \in \mathbb{N}$. Cum b este cifră și $\frac{a}{b}$ este număr zecimal periodic, rezultă că $b \in \{3,6,7,9\}$. Dacă $b=3$, atunci $a_0 \in \{1,2\}$; singura soluție convenabilă este $\frac{a_0}{b}=\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$. Dacă $b=6$, atunci $a_0 \in \{1,5\}$; singura soluție convenabilă este $\frac{a_0}{b}=\frac{1}{6}=0{,}1666666\ldots$. Dacă $b=7$, atunci $a_0 \in \{1,2,3,4,5,6\}$; singura soluție convenabilă este $\frac{a_0}{b}=\frac{5}{7}=0{,}7142857142857\ldots$. Dacă $b=9$, atunci $a_0 \in \{1,2,4,5,7,8\}$ și nu obținem noi soluții. În concluzie, $\frac{a}{b} \in \left\{\frac{3n+1}{3}, \frac{6n+1}{6}, \frac{7n+5}{7} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Prelungim MQ până intersectează AB în R. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile ADC și ABC și obținem $\frac{RA}{RB}=\frac{QA}{CQ}=\frac{PD}{PC}$. Atunci triunghiurile RBM și PCM sunt congruente (C.C). și, astfel, obținem că $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle BRM \equiv \sphericalangle MPC \equiv \sphericalangle PMN$.

3. Dacă $p=2$, atunci $201q^2-q-2=0$ și nu avem soluții. Dacă $q=2$, $p^2-p-802=0$ și iarăși nu avem soluții. Rezultă că p și q sunt impare.
Relația dată se poate scrie sub forma $(p-q)(p+q-1)=200q^2$. Cum $p-q$ nu este multiplu de q, rezultă că $p=kq+1$, prin urmare $(p-q)(k+1)=200q$. Acum, $k=tq-1$, deci $p=tq^2-q+1$ și avem că $(tq^2-2q+1)\cdot t=200$. Numărul t nu poate fi par, pentru că ar rezulta că $p=tq^2-q+1$ este par, contradicție. Rămâne că $t \in \{1,3,25\}$. Studiind fiecare caz în parte, găsim unica soluție $q=3, p=43$.

Clasa a VIII-a

1. Cum $OA \perp (OBC)$, rezultă că $OA \perp BC$. Însă $ON \perp BC$, prin urmare $BC \perp (OAN)$. Analog se arată că $AB \perp (OCM)$. Fie $\{H\}=AN \cap CM$; atunci $OH=(OAN)\cap(OCM)$ și, din cele de mai sus, rezultă că $BC \perp OH$ și $AB \perp OH$, deci $OH \perp (ABC)$.
În triunghiul ABC, AN și CM sunt înălțimi. Se obține ușor că $BA=BC$ dacă și numai dacă $AN=CM$. Unghiurile $\sphericalangle OAN$ și $\sphericalangle OCM$ sunt congruente dacă și numai dacă $OA=OC$ (via triunghiurile dreptunghice HOA și HOC), fapt care se petrece dacă și numai dacă $AN=CM$ (via triunghiurile dreptunghice OAN și OCM).

2. a) Este evident că $A \subseteq (0,+\infty)$. Pentru a demonstra incluziunea inversă, fie $x \in (0,+\infty)$; dacă $n=[x]$, numerele $a=\frac{x}{n+2}$ și $b=\frac{1}{n+2}$ aparțin intervalului $(0,1)$ și $x=\frac{a}{b}$.

b) Este evident că $B \subseteq A$. Pentru incluziunea inversă, fie $x \in (0,+\infty)=A$, $m=\left[x\sqrt{2}\right]$ și $a=\frac{x\sqrt{2}}{m+2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{m+2}$. Dacă $x\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x=\frac{a}{b} \in B$. Dacă $x\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, atunci $x\sqrt{6} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și, pentru $p=\left[x\sqrt{6}\right]$, $a=\frac{x\sqrt{6}}{p+2}$, $b=\frac{\sqrt{6}}{p+2}$, avem că $x=\frac{a}{b} \in B$.

3. Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 numerele date. Observăm că

$$(a_1+a_2+a_5-a_3-a_4)(a_1+a_3+a_4-a_2-a_5)=a_1^2-(a_2+a_5-a_3-a_4)^2 \le a_1^2.$$

Grupând convenabil câte două celelalte opt diferențe, scriem încă patru inegalități similare cu cea precedentă. Prin înmulțirea acestora, rezultă cerința problemei.