**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "PITAGORA"**
**SUBIECTE ȘI BAREME - CLASA a V-a**
**4 aprilie 2015**

**1.** Se consideră numerele : $a = \left(2 \cdot 2^{40} \cdot 2^{59} + 3^{2^2} - 2^{2100} : 4^{1000} + 19\right) \cdot \left(3^{99} + 2 \cdot 3^{99} + 2007^0\right) : \left(3^{100} + 1\right)$,
$b = (2007 + 2 \cdot 2007 + 3 \cdot 2007 + .... + 2006 \cdot 2007) : 1003$ și
$c = 4^n + 2^{2n+3} + 2^{2n+4}$, $n \in N$.
Arătați că cele trei numere sunt pătrate perfecte.

*Soluție:*

$a = (2^{100} + 3^4 - 2^{100} + 19) \cdot (3^{100} + 1) : (3^{100} + 1) = 100 = 10^2$ ....................3p

$b = 2007 \cdot \frac{2006 \cdot 2007}{2} : 1003 = 2007^2$ ....................2p

$c = 4^n(1 + 8 + 16) = 4^n \cdot 25 = (2^n \cdot 5)^2$ ....................2p

**2.** a) Aflați numerele naturale de trei cifre care se măresc de 9 ori dacă li se adaugă o cifră în față.
b) Suma a 63 de numere naturale distincte este egală cu 2015 aflați produsul celor mai mici 10 numere dintre cele 63 de numere.

*Soluție:*

a) Fie $\overline{abc}$ numărul cerut
$\overline{dabc} = 9 \cdot \overline{abc} \Leftrightarrow 1000d = 8 \cdot \overline{abc} \Leftrightarrow 125d = \overline{abc}$ ....................2p
Atunci $d \in \{1,2, ... ,7\}$ și $\overline{abc} \in \{125, 250, 375, 500, 625, 750, 875\}$ ....................1p

b) Dacă sunt toate numerele nenule, atunci suma celor 63 de numere este cel puțin (63·64):2=2016 fals....................2p
Deci, cel mai mic număr este 0 și produsul cerut este 0.................... 2p

**3.** Demonstrați că : $0{,}03 < \frac{\overline{a,(bc)}}{\overline{abc}} + \frac{\overline{b,(ca)}}{\overline{bca}} + \frac{\overline{c,(ab)}}{\overline{cab}} < 0,(03)$, unde $a \neq b \neq c \neq 0$.

*Soluție:*

Este suficient să demonstrăm că fiecare fracție este cuprinsă între $\frac{1}{100}$ și $\frac{1}{99}$....................2p

Avem că $\frac{\overline{a,(bc)}}{\overline{abc}} = \frac{1}{99} \cdot \frac{\overline{abc}-a}{\overline{abc}} < \frac{1}{99} \cdot \frac{\overline{abc}}{\overline{abc}} = \frac{1}{99}$ ....................1p

iar pentru ca $\frac{1}{100} < \frac{\overline{a,(bc)}}{\overline{abc}}$, ar trebui ca $\overline{abc} < 100 \cdot \overline{a,(bc)}$ ....................1p

adică $99 \cdot \overline{abc} < 100 \cdot (\overline{abc} - a) = 100 \cdot \overline{abc} - 100a$ , ceea ce înseamnă că $100 \cdot a < \overline{abc}$, propoziție adevărată....................2p

Finalizare ....................1p

**4.** Mai mulți elevi, fete și băieți, sunt asezați pe un singur rând, în ordinea descrescătoare a înălțimii. Intre oricare doi băieți consecutivi sunt așezate câte trei fete, iar orice grup de trei fete consecutive este încadrat de câte doi băieți. Dacă cel mai înalt elev din grup este băiat, iar numărul de fete este cu 50 mai mare decât cel al băieților, determinați numărul total al elevilor.

*Soluție:*

Dacă b este numărul băieților și f numărul fetelor, atunci f=3·(b-1)+n, unde n $\in \{0,1,2\}$ reprezintă numărul de fete neîncadrate de băieți ....................2p

f-b=50. Obținem ecuația 3(b-1)+n-b=50, adică 2b=53-n, unde n $\in \{0,1,2\}$....................2p

Ecuația are soluții pentru n=1, b=26,f=76 ....................2p

Finalizare: 102 elevi....................1p

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "PITAGORA"**
**SUBIECTE ȘI BAREME - CLASA a VI-a**
**4aprilie 2015**

**1.** Suma a trei numere naturale este 345. Dacă se mărește primul număr cu 25% din el, al doilea cu 50% din el și al treilea cu 20% din el, obțin numere egale. Calculați numerele.

*Soluție:*

$x + y + z = 345$ ........................................ 1p
$x + \frac{25}{100}x = y + \frac{50}{100} = z + \frac{20}{100}z$ ........................................ 1p
$\frac{5x}{4} = \frac{3y}{2} = \frac{6z}{5} = k$ ........................................ 1p
$\frac{4k}{5} + \frac{2k}{3} + \frac{5k}{6} = 345, k = 150$ ........................................ 3p
$x = 120, y = 100, z = 125$ ........................................ 1p

**2.** Determinați numerele naturale $x$, $y$, $z$ astfel încât numerele $x^4$, $y^2$ și $z^3$ să fie direct proporționale cu numerele 32, 18 și respectiv 27, iar $x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 2^{16} \cdot 3^6$.

*Soluție:*

$\frac{x^4}{2^5} = \frac{y^2}{2\cdot 3^2} = \frac{z^3}{3^3}$ ........................................ 1p
$\frac{x^4}{2^5} = \frac{y^2}{2\cdot 3^2} \Longrightarrow x^4 \cdot 3^2 = y^2 \cdot 2^4 \Longrightarrow x = 2a,\ \ y = 3b$ ........................................ 2p
$\frac{y^2}{2\cdot 3^2} = \frac{z^3}{3^3} \Longrightarrow y^2 \cdot 3 = z^3 \cdot 2 \Longrightarrow z = 3c$ ........................................ 1p
$\frac{x^4}{2^5} = \frac{y^2}{2\cdot 3^2} = \frac{z^3}{3^3} \Longrightarrow \frac{2^4\cdot a^4}{2^5} = \frac{3^2\cdot b^2}{2\cdot 3^2} = \frac{3^3\cdot c^3}{3^3} \Longrightarrow b = a^2$ ........................................ 1p
$x^3y^4z^2 = 2^{16} \cdot 3^6 \Longrightarrow 2^3 \cdot 3^6 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot c^2 = 2^{16} \cdot 3^6$
$a^{11} \cdot c^2 = 2^{13} \Longrightarrow a = c = 2, b = 4$ ........................................ 1p
$x = 4,\ \ y = 12,\ \ y = 6$ ........................................ 1p

**3.** Pe semidreapta închisă $[A_1X$ se iau punctele $A_2$, $A_3$, $A_4$, …., $A_{2015}$, $A_{2016}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots. = A_{2015}A_{2016} = d$, unde $d \leq 2$ cm și $d \geq$ 4mm.

a) Calculați în metri cea mai mică și cea mai mare valoare a lungimii segmentului $[A_1A_{2016}]$.
b) Dacă d = 0,2(6) cm, aflați lungimea segmentului $[A_{425}A_{2000}]$ și precizați numărul segmentelor $[A_iA_j]$, $1 \leq i < j \leq 2010$, care sunt congruente cu segmental $[A_{425}A_{2000}]$.

*Soluție:*

a) $L=2015d$, $L_{min}$=8060mm=8,06m, iar $l_{max}$=4030cm=40,30m ........................................ 3p
b) Avem că $A_{425}A_{2000} = 0{,}2(6)cm \cdot (2000 - 425) = 420cm$ ........................................ 1p
Toate segmentele $[A_iA_j]$, $1 \leq i < j \leq 2010$, cu $j - i = 2000 - 425 = 1575$, sunt congruente cu segmentul $[A_{425}A_{2000}]$,
iar numărul lor este 2010-1575-1=434 ........................................ 3p

**4.** Fie triunghiul ABC cu AB<AC. Fie D mijlocul lui (BC). Perpendiculara din D pe bisectoarea unghiului ∢BAC intersectează dreptele AB și AC în punctele E și respectiv F. Paralela prin C la dreapta AB intersectează dreapta EF în punctul P. Demonstrați că:
a) [AE] ≡ [AF]; b)[CF] ≡ [CP]; c)ΔBED≡ΔCPD.

*Soluție:*

Fie EF⋂AN={M}
a) ΔAME≡ ΔAMF(C.U.)⟹AE=AF ........................................ 2p
b) ∡AEF≡ ∡CPF (alterne interne), ∡AEF≡ ∡AFE, ∡AFE≡ ∡CFP
⟹ ∡CPF≡ ∡CFP ........................................ 1p
ΔCPF isoscel ⟹ CF=CP ........................................ 1p
c) [BD] ≡[DC], ∡EDB≡ ∡PDC (opuse la vârf), ∡EBD≡ ∡PCD (alterne interne) ........................................ 2p
Deci BED≡ΔCPD(U.L.U.) ........................................ 1p

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "PITAGORA"**
**SUBIECTE ȘI BAREME - CLASA a VII-a**
**4aprilie 2015**

1. a) Să se rezolve ecuația $\mathbf{2(2^x+6)-\sqrt{\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{89}{1936}\right)}=2015}$.

b) Fie A=$\overline{444....4}$, cu 2014 cifre si B = $\overline{888....8}$ cu 1007 cifre. Arătați că numărul $\sqrt{A-B}$ este rațional.

*Soluție:*

a) Fie $\mathbf{P}=\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{89}{1936}\right)=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{25}{16}\cdot\ldots\cdot\frac{2025}{1936}=2025=45^2$ .....2p

Atunci ecuația este echivalentă cu $2^{x+1}+10-45=2013$, adică $2^{x+1}=2048$ și prin urmare $2^{x+1}=2^{11}$ de unde $x+1=11$, deci $x=10$.........................................................................2p

b) $\sqrt{\underbrace{444....4}_{2014cifre}-\underbrace{888....8}_{1007cifre}}=\sqrt{4\cdot\underbrace{111...1}_{2014cifre}-8\cdot\underbrace{111....1}_{1007cifre}}=\sqrt{4\left(\underbrace{111...1}_{1007cifre}\cdot 10^{1007}+\underbrace{111...1}_{1007cifre}\right)-8\cdot\underbrace{111....1}_{1007cifre}}$ ....1p

Notam $x=\underbrace{111....1}_{1007cifre}$, se obtine:

$\sqrt{4(x\cdot 10^{1007}+x)-8x}=\sqrt{4x\cdot 10^{1007}+4x-8x}=\sqrt{4x\cdot 10^{1007}-4x}=\sqrt{4x(10^{1007}-1)}=$

$\sqrt{4x\cdot\underbrace{999...9}_{1007cifre}}=\sqrt{4\cdot x\cdot 9\cdot\underbrace{111...1}_{1007cifre}}=\sqrt{4\cdot 9\cdot x\cdot x}=2\cdot 3\cdot x=\underbrace{666....6}_{1007}\in N$ ............2p

**2.**a) Fie expresia $A(x,y)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{y^2+8y+17}$, unde $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Determinați valoarea minimă a expresiei $A(x,y)$.

b) Determinați numerele întregi a, b, c, știind că $a^2\le b+c$, $b^2\le a+c$ și $c^2\le a+b$.

*Soluție:*

a) $A(x,y)=\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(y+4)^2+1}$, ..........................................................................1p

$(x-3)^2\ge 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$; $(x+4)^2\ge 0$, oricare ar fi $y\in\mathbb{R}$.................................................. 1p

$\Rightarrow$valoarea minimă a expresiei A(x;y) = 2 + 1 = 3.....................................................................1p

b) Din $a^2\le b+c$, $b^2\le a+c$ și $c^2\le a+b$; prin adunare, obținem: $a^2+b^2+c^2\le 2a+2b+2c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)\le 3\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\le 3$...........1p

Notăm $|a-1|=m\in\mathbb{N}$; $|b-1|=n\in\mathbb{N}$; $|c-1|=k\in\mathbb{N}$; $\Rightarrow m^2+n^2+k^2\le 3$..................1p

Dacă $m\ge 2$ sau $n\ge 2$ sau $k\ge 2$, atunci $m^2+n^2+k^2\ge 4$, prin urmare nu avem soluții.

Deci $m\in\{0;1\}$, $n\in\{0;1\}$, $k\in\{0;1\}$.

Dacă $m=n=0$ și $k=1\Rightarrow a=b=1$ și $c=0$ sau $c=2$;

Dacă $m=k=0$ și $n=1\Rightarrow a=c=1$ și $b=0$ sau $b=2$;

Dacă $n=k=0$ și $m=1\Rightarrow b=c=1$ și $a=0$ sau $a=2$;

Dacă $m=0$ și $n=k=1\Rightarrow a=1$ și $\begin{cases}b=0 \text{ sau } b=2\\ c=0 \text{ sau } c=2\end{cases}$;

Dacă $n=0$ și $m=k=1\Rightarrow b=1$ și $\begin{cases}a=0 \text{ sau } a=2\\ c=0 \text{ sau } c=2\end{cases}$;

Dacă $k=0$ și $m=n=1\Rightarrow c=1$ și $\begin{cases}a=0 \text{ sau } a=2\\ b=0 \text{ sau } b=2\end{cases}$;

Dacă $m=n=k=1\Rightarrow\begin{cases}a=0 \text{ sau } a=2\\ b=0 \text{ sau } b=2;\\ c=0 \text{ sau } c=2\end{cases}$.................................................................................2p

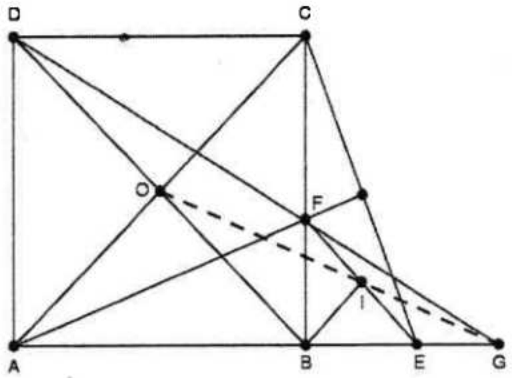
3. Fie ABCD un pătrat de centru O, E un punct pe semidreapta (AB – [AB], AF⊥CE , F∈BC, DF∩AB={G}, BI ⊥ EF. Arătaţi că punctele O, I, G sunt coliniare.

*Soluţie:*

În ΔACE cu CB⊥AE, AF⊥CE şi CB∩AF={F} avem F ortocentru şi deci EF⊥AC;
dar BD⊥AC şi prin urmare EF ∥ BD.................................................................................... ......2p
Rezultă m(<ABO)=m(<BEF)=45⁰, atunci ΔBEF este dreptunghic isoscel şi cum m(<FBE)=90⁰, iar BI ⊥ EF avem BI înălţime,mediană , deci I este mijlocul lui EF.............................................2p
În ΔBDG cu BD ∥ EF, I mijlocul lui EF şi OG mediană (O fiind mijlocul lui BD), rezultă I se află pe mediana OG, deci punctele sunt coliniare........................................................................1p

Obs.
1. Din ΔOBG~ΔIEG rezultă <BOG≡<EIG, deci punctele O,I,G sunt coliniare.
2. Într-un trapez BDFE, mijloacele bazelor (O, respectiv I) şi punctul de intersecţie G al laturilor neparalele, sunt puncte coliniare.

Fig. ....2p




4. Fie trapezul ABCD (AB∥CD) în care: AB = 6a; CD = a, AC ⊥ BD şi m(∢BAD)=60⁰.
a) Arătaţi că : $AD^2 + BC^2 = 37a^2$.  b) Calculaţi aria şi perimetrul trapezului.

Prof. Ioan Cîmpean, Alba Iulia

*Soluţie:*

a) Fie $AC \cap BD = \{I\}$

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 = DI^2 + AI^2 (T.P.) \\ BC^2 = CI^2 + BI^2 (T.P.) \end{array}\right\} \Rightarrow AD^2 + BC^2 = AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 (1)$$

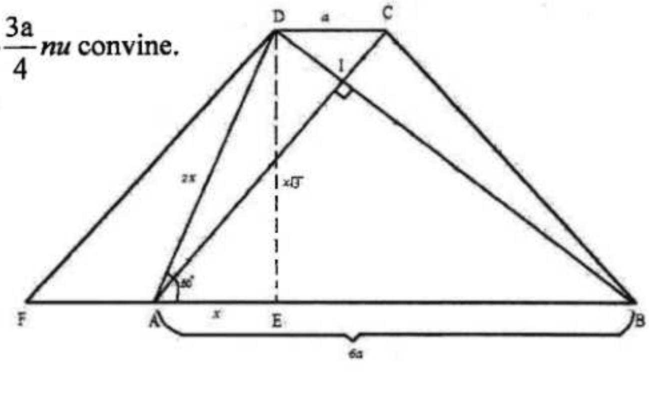
$$\Rightarrow AD^2 + BC^2 = 37a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} AI^2 + BI^2 = 36a^2 (T.P.) \\ CI^2 + DI^2 = a^2 (T.P.) \end{array}\right\} \Rightarrow AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 = 37a^2 (2)$$

b) Fie DF∥AC, F∈ AB şi DE ⊥ AB; triunghiul BDF dreptunghic în şi m(<DAB) = 60⁰⇒E∈[AB]
Fie AD = 2x, deci AE = x si DE = $x\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} DF^2 = (a+x)^2 + (x\sqrt{3})^2 (T.P.) \\ DB^2 = (6a-x)^2 + (x\sqrt{3})^2 (T.P.) \\ DF^2 + DB^2 = BF^2 (T.P.) \end{array}\right\} \Rightarrow 8x^2 - 10ax - 12a^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5ax - 6a^2 = 0$$

$\Rightarrow (x-2a)(4x+3a) = 0 \Rightarrow x = 2a$ sau $x = -\frac{3a}{4}$ *nu* convine.




Deci AD =4a, DE = $2a\sqrt{3}$, AE = 2a.
Din a) $\Rightarrow BC^2 = 37a^2 - 16a^2 \Rightarrow BC = 2a$.
Se obtine aria trapezului = $7a^2\sqrt{3}$ si
perimetrul trapezului = $11a + a\sqrt{21}$

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "PITAGORA"**
**SUBIECTE ȘI BAREME - CLASA a VIII-a**
**4 aprilie 2015**

1. a) Dacă $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014$, calculați $\frac{x}{x+1}+\frac{y+1}{y+2}+\frac{z+2}{z+3}$.

   b) Rezolvați în **Z** ecuația : $\sqrt{x^2-20}+\sqrt{45-x^2}=|2x+5|$.

Soluție: a) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$ ................................................................1p

$\frac{x}{x+1}+\frac{y+1}{y+2}+\frac{z+2}{z+3}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{y+2}{y+2}-\frac{1}{y+2}+\frac{z+3}{z+3}-\frac{1}{z+3}=3-\frac{2014}{2015}=\frac{4031}{2015}$ ........2p

b) Din condiții obținem $x^2-20\geq 0;\ 45-x^2\geq 0\Rightarrow$

$\begin{cases} x^2\geq 20\Rightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{20}]\cup[\sqrt{20};\infty) \\ x^2\leq 45\Rightarrow x\in[-\sqrt{45};\sqrt{45}] \end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\sqrt{45};-\sqrt{20}\right]\cup\left[\sqrt{20};\sqrt{45}\right]$.......1p

Cum $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-6,-5,5,6\}$......................................................................................1p

Dacă x=-6, obținem 4+3=$|-12+5|\Leftrightarrow 7=7$, adevărat. Dacă $x=-5\Rightarrow 3\sqrt{5}=|-5|\Rightarrow 3\sqrt{5}=5$, imposibil. Dacă x=5$\Rightarrow 3\sqrt{5}=15$, imposibil.Dacă $x=6\Rightarrow 7=17$, imposibil.....................1p

Deci x=-6este unica soluție.................................................................................................1p

2. Reprezentați grafic funcția $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$, pentru orice $x\in R$, unde $a,\ b\in Q$, știind că $\left(b\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-\left(a\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{6}+5$.

Soluție: $2b^2-2b\sqrt{6}+3-3a^2-2a\sqrt{6}-2=2\sqrt{6}+5$ ...........................................................1p

$2b^2-3a^2-6-2\sqrt{6}(a+b+1)=0$ ..............................................................................1p

$\begin{cases} 2b^2-3a^2-6=0 \\ a+b+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-b-1 \\ (b+3)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}\Rightarrow f(x)=3x-3$ ..............................3p

Reprezentarea grafica...............................................................................................2p

3. Fie ABCA'B'C' o prismă regulată dreaptă în care latura bazei AB= 2a, și înălțimea AA'= 3a. Știind că D este mijlocul lui [BC] și M $\in$(CC') astfel încât măsura unghiului format de dreapta A'M cu planul (ABC) este de $45^0$. Se cere:
   a) măsura unghiului format de planele (A'BC) și (ABC);
   b) calculațu distanța de la punctul A la planul (A'MD)

Prof. Ioan Cîmpean, Alba Iulia

Soluție: Figura............................................................................................................1p

a) $m(\widehat{(ABC),(A'BC)})=m(\measuredangle A'DA)$..................................................................1p

AD = $a\sqrt{3}$, $tg(\measuredangle A'DA)=\frac{A'A}{AD}=\sqrt{3}$, $m(\measuredangle A'DA)=60^0$ .

Așadar $m(\widehat{(ABC),(A'BC)})=60^\circ$ ................................................................1p

b) Fie $A'M\cap(ABC)=\{E\}, E\in AC$ și $\Delta A'AE$ dreptunghic isoscel (A'A=AE)

Așadar $CE=a, \Delta CDE$ isoscel (CD=CE=a), $m(\measuredangle DCE)=120^0$, deci $m(\measuredangle AED)=60^0$

Fie $DE\cap AB=\{F\}, \Delta AEF$dr. în F $\Rightarrow EF\perp AB, AF=\frac{AE}{2}=\frac{3a}{2}$. Obs. (A'MD)=(A'FE) ........2p

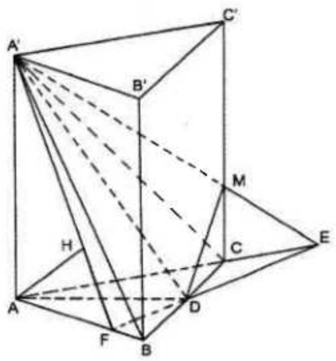
$A'F\perp FE$ (cf. T3$\perp$).

Fie $AH\perp A'F,\ H\in A'F$, deci $d(A,(A'EF))=AH$ (cf. R2 T3$\perp$)..........................................1p

$A'F^2=A'A^2+AF^2$ (TP); $A'F=\frac{3a\sqrt{5}}{2},\ AH=\frac{A'A\cdot AF}{A'F}=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$..........................................1p

Altă soluție 2b): Din scrierea volumului tetraedrului A'MAD în două moduri se obține

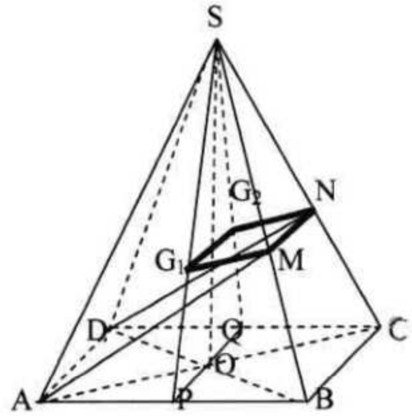
$d(A,(A'EF))=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$




4. În piramida patrulateră regulată SABCD fie AM, respectiv DN bisectoarele unghiurilor SAB, respectiv SDC ($M \in SB$, $N \in SC$); fie $G_1$, respectiv $G_2$ centrele de greutate ale triunghiurilor SAB, respectiv SDC. Arătaţi că punctele M, N, $G_1$, $G_2$ sunt coplanare

prof. Mitea Mariana, Cugir

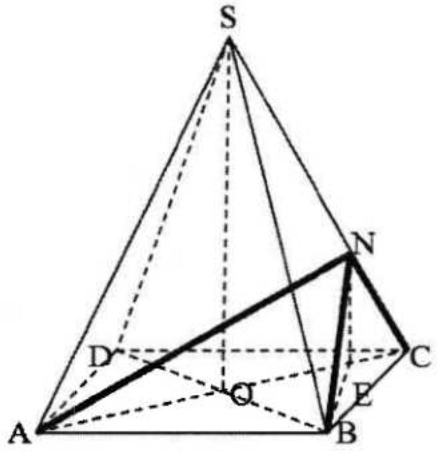
<u>*Soluţie:*</u>




Conform T. Bisectoarei avem $\frac{SA}{AB} = \frac{SM}{MB}$, respectiv $\frac{SD}{DC} = \frac{SN}{NC}$ (pentru cele două bisectoare AM şi DN). Dar $SA \equiv SD$ (ca muchii laterale) şi $AB \equiv DC$ ( ca muchii ale bazei), iar atunci obţinem egalitatea $\frac{SM}{MB} = \frac{SN}{NC}$ şi conform reciprocei T. Thales rezultă că $MN \parallel BC$. (1)

Fie P mijlocul lui AB şi Q mijlocul lui DC; dacă $G_1$ este centrul de greutate al $\Delta SAB$ avem $\frac{SG_1}{G_1P} = \frac{2}{1}$, iar dacă $G_2$ este centrul de greutate al $\Delta SDC$ avem $\frac{SG_2}{G_2Q} = \frac{2}{1}$, de unde rezultă $\frac{SG_1}{G_1P} = \frac{SG_2}{G_2Q}$ şi conform reciprocei T. Thales rezultă că $G_1G_2 \parallel PQ$. (2)

În $\Delta ABC$ avem P mijlocul lui AB şi O mijlocul lui AC, atunci PO este linie mijlocie şi deci $PO \parallel BC$; analog în $\Delta DBC$ avem Q mijlocul lui DC şi O mijlocul lui DB, atunci QO este linie mijlocie şi deci $QO \parallel BC$; rezultă conform axiomei paralelelor că punctele P, O, Q sunt coliniare şi prin urmare $PQ \parallel BC$ (3). Din (2) şi (3) rezultă $G_1G_2 \parallel BC$ şi cum $MN \parallel BC$ (1) obţinem $G_1G_2 \parallel MN$, ceea ce dovedeşte că punctele M, N, $G_1$, $G_2$ sunt coplanare .................................................................4p




b) În $\Delta SAC$ ducem $NE \parallel SO$ ($E \in AC$), însă $SO \perp (ABC)$, iar atunci rezultă $NE \perp (ABC)$, de unde $NE \perp AC$, $NE \perp BE$.

Aplicând T. Pitagora obţinem:

$$NA^2 + NC^2 = (AE^2 + NE^2) + (EC^2 + NE^2) =$$
$$= (AO + OE)^2 + NE^2 + (CO - OE)^2 + NE^2 =$$
$$= (AO + OE)^2 + 2 \cdot NE^2 + (AO - OE)^2 =$$
$$= AO^2 + 2 \cdot AO \cdot OE + OE^2 + 2 \cdot NE^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot OE + OE^2$$
$$= 2 \cdot (AO^2 + OE^2) + 2 \cdot NE^2 = 2 \cdot (BO^2 + OE^2) + 2 \cdot NE^2 =$$
$$= 2 \cdot BE^2 + 2 \cdot NE^2 = 2 \cdot (BE^2 + NE^2) = 2 \cdot NB^2 \ ;$$

deci $NB^2 = \frac{NA^2+NC^2}{2} > \sqrt{NA^2 \cdot NC^2} = NA \cdot NC$ conform inegalităţii mediilor.........................................3p