Concursul Județean,, Dan Barbilian ”

13 decembrie 2014 – PITEȘTI

Clasa a IV –a

SUBIECTE:

1. Fie ***a, b, c și d*** patru numere naturale nenule. Împărțindu-l pe ***a*** la ***b,*** pe ***b*** la ***c*** și pe ***c*** la ***d*** , obținem, la fiecare împărțire, câtul 2 și restul 2 .

a) Care este restul împărțirii lui ***b*** la 4?

b) Care este cea mai mică valoare pe care o poate avea ***a***?

2. Suma numerelor cu care sunt numerotate paginile de la mijlocul unei cărți este 113. Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor cărții? De câte ori s-a folosit cifra 3?

3. În 3 pungi sunt bomboane folosite pentru împodobirea Pomului de Crăciun. În prima sunt cu 8 mai multe decât în celelalte două la un loc. Dacă în a doua ar fi cu 9 mai puține, atunci în aceasta ar fi de 6 ori mai puține decât în celelalte două la un loc. Știind că în a doua sunt cu 8 mai puține decât în a treia , să se afle câte bomboane sunt în fiecare pungă.

4. Mihai Eminescu, Ion Creangă și Dan Barbilian au trăit împreună 160 de ani. Dacă Ion Creangă ar mai fi trăit 2 ani, atunci vârsta sa ar fi fost jumătate din suma vârstelor lui Mihai Eminescu și Dan Barbilian. El a murit însă cu 8 ani înainte de a avea de două ori diferența dintre vârstele lui Dan Barbilian și Mihai Eminescu. Câți ani a trăit fiecare?

Clasa a V – a

1. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{aa} \cdot (b^2 - a) = 2013$

2. Se consideră numărul natural $a = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2009}$

a) Demonstrați că numărul a este număr par;

b) Demonstrați că numărul a este divizibil cu 13;

c) Determinați câtul și restul împărțirii numărului $b = a + 3^{2010} + 3^{2011}$ la 13.

3. Se consideră tabelul urmator:

Linia 1			1		
Linia 2		3	5	7	
Linia 3	9	11	13	15	17

a) Scrieți elementele situate pe linia 10;

b) Determinați numărul elementelor liniei 2014 și aflați restul împărțirii celui mai mic element al liniei 2014 prin 2013.

4. Ana și Barbu desenează pe o foaie de hârtie grupuri de steluțe. Ana desenează o steluță, apoi 3 steluțe, apoi 5 steluțe, și așa mai departe de fiecare dată un număr impar de steluțe.

Barbu desenează 2 steluțe, apoi 4 steluțe, apoi 6 steluțe, și așa mai departe de fiecare dată un număr par de steluțe.

Arătați că indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul de steluțe desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul de steluțe desenate de Barbu.

Concursul Judeţean „Dan Barbilian”
13 decembrie 2014 - PITESTI
Clasa a VI – a

1. a) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât fracţia $\dfrac{3n+7}{11n+24}$ să fie reductibilă şi apoi aflaţi suma primelor 100 numere scrise în ordine crescătoare ce îndeplinesc această condiţie.

b) Arătaţi că nu există două numere naturale *p*, *n* astfel încât două dintre fracţiile $\dfrac{3}{11}$; $\dfrac{3n+7}{11n+24}$; $\dfrac{3p}{11p+1}$ să fie echivalente.

2. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ în baza 10, ştiind că: $\overline{abc}+\overline{ab}+a=2^d+6$.

3. Aflaţi numerele naturale *a* şi *b* ştiind că: $a-b=(a,b)$ şi $a+b=54$.

4. Pe o dreaptă *d* se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_{2014}$ în această ordine astfel încât:

$|A_1A_2|=2^2$ cm; $|A_2A_3|=2^4$ cm; $|A_3A_4|=2^6$ cm; … $|A_{2013}A_{2014}|=2^{4026}$ cm;

a) Dacă $|A_1A_{2014}|=n$; $n \in \mathbb{N}^*$ arătaţi că *n* are exact trei divizori primi mai mici decât 10.

b) Ştiind că *M* este mijlocul segmentului $[A_1A_{2014}]$ determinaţi $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $M \in (A_k, A_{k+1})$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.
Timp de lucru: 2 ore

Concursul Judeţean „Dan Barbilian”
13 decembrie 2014 - PITESTI
Clasa a VII-a

SUBIECTE:

1. Fie numerele distincte x, y, z $\in$ N*/{1}.
Arătaţi că $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\geq\frac{5}{8}$.

2. Fie numerele raţionale nenule x, y, z care verifică relaţiile $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$.

Arătaţi că există x, y, z care verifică relația $x+y^2+z^3=\frac{7}{8}$.

3. Considerăm patrulaterul convex ABCD, M și N mijloacele laturilor CD, respectiv BC și {O} = AC $\cap$ BD.

a) Dacă O este centrul de greutate al triunghiului AMN, demonstrați că OMCN și ABCD sunt paralelograme.

b) În condițiile punctului **a)** dacă BD $\cap$ AM = {E}, P $\in$ [AE], $PE=\frac{AE}{4}$, arătați că P, O, N sunt coliniare.

4. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se prelungesc segmentele [AG], [BG], [CG] cu segmentele [GM] $\equiv$ [AG], [GN] $\equiv$ [BG], respectiv [GP] $\equiv$ [CG].

a) Demonstrați că ΔABC $\equiv$ ΔMNP;

b) În ce situație patrulaterul ABMN este dreptunghi?

c) Arătați că AB + BC + CA < 3(GM + GN + GP) < 2(AB + BC + CA).

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore

Concursul Judeţean „Dan Barbilian”
13 decembrie 2014 - PITEŞTI
Clasa a VIII – a

SUBIECTE:

1. Determinaţi numerele naturale nenule x şi y care verifică relaţia $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

(Problema E:14523 din Gazeta matematică Nr.6-7-8/2013)

2. Fie n $\in$ N, $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ astfel încât: $[x_1] = n, [x_2] = n+1, ..., [x_n] = 2n-1$, unde [t] este partea întreagă a numărului t .

a) Aflaţi câte valori poate lua $[x_1 + x_2 + ... + x_n]$.

b) Determinaţi numărul n dacă valoarea maximă posibilă a lui $[x_1 + x_2 + ... + x_n]$ este 39.

3. Dacă planul α , paralel cu baza (BCD) a piramidei ABCD, intersectează muchiile $(AB), (AC), (AD)$ în punctele M, N, respectiv P, atunci demonstraţi că:

$$AP\left(\frac{1}{AN} + \frac{1}{AM}\right) + \frac{MB + NC}{PD} \geq 4 .$$

4. În paralelipipedul dreptunghic ABCDA’B’C’D’ se duce planul α determinat de vârful A, de punctul M - centrul bazei superioare A’B’C’D’ şi de punctul N - centrul feţei laterale BB’C’C. Fie P punctul de intersecţie a planului α cu muchia [B’C’].

a) Să se determine raportul C’P / PB’;

b) Arătaţi că secţiunea determinată în paralelipiped de planul α nu poate fi dreptunghi;

c) Dacă paralelipipedul ar avea toate muchiile de lungime egală cu a, demonstraţi că aria secţiunii de la punctul **b)** este mai mică decât $\frac{10}{9}a^2$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore

Clasa a IV-a BAREM de CORECTARE si NOTARE

1. Reprezentarea prin desen sau prin simboluri : 2 p

d = 1 parte
c = 2 părţi – 2
b = 4 părţi + 3x2
a = 8 părţi – 7x2

b : 4 → (4p + 6) : 4 = p + 1 (rest 2) 1p

d=1 c= 4 d : c = 4 : 1 = 4 (soluţie incorectă) 1 p
d = 2 c = 6 d . c = 6 : 2 = 3 (soluţie incorectă) 1 p
d = 3 c= 8 d: c = 8 : 3 = 2 (rest 2) 2 p
b = 18 b : c = 18 : 8 = 2 (rest 2)
a = 38 a : b = 38 : 18= 2 (rest 2) (soluţie corectă)

2. Găsirea numerelor de pe cele 2 pagini – (113-1): 2 = 56 56 + 1 = 57 2p
Stabilirea numărului de pagini ale cărţii 56x2 = 112 1p
Găsirea numărului de cifre : 9pag. X 1 cifră = 9 cifre 2p
90 pag. X 2 cifre = 180 cifre
13 pag. X 3 cifre = 39 cifre
9 + 180 + 39 = 228 cifre
Găsirea numărului de cifre 3 – 11 la cifra unităţilor + 10 la cifra zecilor 2p

3. Faza I 1p
II /_________/
III/ _________/ 8 /
I /_________/__________/ 8 / 8 /

Faza a II –a 2p
II /______/..9../
I+ III /______/ 9 /_______/ 9 / 8 / 8 /_______/ 8

Concluzia : 3 părţi = 3x9 + 3x8 2p
1 parte = 17
II = 17 + 9 = 26

III = 26 + 8 = 34 1p

I = 26 + 34 + 8 = 68 1p

4 . IC /_________/..2./ }160 3p
ME + DB /____________/____________/

160 + 2 = 162
162 : 3 părţi = 54
54 – 2 = 52 → vârsta lui Ion Creangă

160 – 52 = 108 →suma vârstelor lui Mihai Eminescu şi Dan Barbilian 2p
52 + 8 = 60 → dublul diferenţei
60 : 2 = 30 → diferenţa

ME / __________/ } 108 2p
DB / __________/ 30

108 – 30 = 78
78 : 2 = 39 → vârsta lui Mihai Eminescu
39 + 30 = 69 → vârsta lui Dan Barbilian

Concursul Judeţean „Dan Barbilian”
13 decembrie 2014 – PITEȘTI
Clasa a V – a

BAREM de CORECTARE şi NOTARE:

1. Scrie 2013 = 3 · 11 · 61 .... 2p
$\overline{aa} \bullet (b^2 - a) = 3 \cdot 11 \cdot 61$ 1p
$\overline{aa} = 11$ pentru care nu există soluție 1p
$\overline{aa} = 33 \Rightarrow$ a = 3 şi b = 8 .... 2p
Numărul căutat este 38 .... 1p

2. a) $a = (1 + 3) + (3^2 + 3^3) + ... + (3^{2008} + 3^{2009})$
$a = 4 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + ... + 4 \cdot 3^{2008}$ 1p
a = 2k, k $\in$ N*, a este număr par 1p
b) $a = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + ... + (3^{2007} + 3^{2008} + 3^{2009})$
$a = 13 + 13 \cdot 3^3 + 13 \cdot 3^6 + ... + 13 \cdot 3^{2007}$ 1p
$a = 13(1 + 3^3 + 3^6 + ... + 3^{2007}) \Rightarrow 13/a$ 1p
c) $b = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}$ are 2012 termeni 1p
$b = 1 + 3 + (3^2 + 3^3 + 3^4) + ... + (3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011})$
$b = 4 + 13(3^2 + 3^5 + ... + 3^{2009})$ 1p
Restul împărțirii numărului b la 13 este 4, iar câtul este $3^2 + 3^5 + ... + 3^{2009}$ 1p

3. a) Pe linia 1 se află 2 · 1 – 1 = 1 element
Pe linia 2 se află 2 · 2 – 1 = 3 elemente
Pe linia k se află 2 · k – 1 elemente, k $\in$ N* 1p
Pe linia 10 se află 2 · 10 – 1 = 19 elemente 1p
Pe primele 9 linii se află $1 + 3 + 5 + ... + 17 = 9^2 = 81$ numere impare consecutive 1p
Linia 10 începe cu al 82-lea număr impar, 82 · 2 – 1 = 163 .... 1p
Elementele situate pe linia 10 sunt: 163, 165, 167, ..., 199 .... 1p
b) Pe linia 2014 se află 2 · 2014 – 1 = 4027 elemente 1p
Cel mai mic element al său este $2 \cdot 2013^2 + 1$, deci restul împărțirii la 2013 este 1 .... 1p

4. Numărul de steluțe desenate de Ana este $1 + 3 + 5 + ... + (2k + 1) = k^2$ 1p
Numărul de steluțe desenate de Barbu este 2 + 4 + 6 + ... + 2p = p(p + 1) 1p
Numărul de steluțe desenate de Ana este pătrat perfect 1p
Numărul de steluțe desenate de Barbu este produs de numere consecutive 1p
Numărul de steluțe desenate de Barbu nu poate fi pătrat perfect 1p
Finalizare 2p

<u>**Notă:**</u>

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Clasa a VI-a

1. a) $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $d = (3n+7, 11n+24)$

$\Rightarrow d \mid 11\cdot(3n+7) - 3\cdot(11n+24) \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow d = 5$ ……………...(1p)

Din $5 \mid 11n+24 \Rightarrow 5 \mid n+4 \Rightarrow n = 5k+1$; $k \in \mathbb{N}$ ………………(1p)

$S = (5\cdot 0+1)+(5\cdot 1+1)+...+(5\cdot 99+1)$ ………………(1p)

$S = 5\cdot(0+1+2+...+99) + \underbrace{1+1+...+1}_{100 \text{ de } 1}$

$S = 5\cdot \dfrac{99\cdot 100}{2} + 100 = 5\cdot 99\cdot 50 + 100$

$S = 24850$ ………………(1p)

b) $\dfrac{3n+7}{11n+24} > \dfrac{3}{11}$ ………………(1p)

$\dfrac{3p}{11p+1} < \dfrac{3}{11}$ ………………(1p)

$\Rightarrow \dfrac{3n+7}{11n+24} > \dfrac{3p}{11p+1}$ ………………(1p)

2. $100a+10b+c+10a+b+a = 2^d + 6$

$111a+11b+c = 2^d+6$ ……………..(2p)

$a \ge 1 \Rightarrow 2^d + 6 \ge 111 \Rightarrow d \ge 7$ ……………..(1p)

1. $d = 7 \Rightarrow 111a+11b+c = 134 \Rightarrow a = 1$ şi $11b+c = 23 \Rightarrow b = 2$; $c = 1$ ....(1p)

2. $d = 8 \Rightarrow 111a+11b+c = 262$; $11b+c \le 108 \Rightarrow a = 2$ şi $11b+c = 40 \Rightarrow b = 3$; $c = 7$ …..(1p)

3. $d = 9 \Rightarrow 111a+11b+c = 518$; $11b+c \le 108 \Rightarrow a = 4$ şi $11b+c = 74 \Rightarrow b = 6$; $c = 8$ …..(1p)

$\Rightarrow \overline{abcd} \in \{1217; 2378; 4689\}$ …..(1p)

3. $d = (a,b) \Rightarrow \exists m, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\begin{matrix} a = md \\ b = pd \\ (m,p) = 1 \end{matrix}$ …………….(1p)

Atunci $\begin{cases} md - pd = d \\ md + pd = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - p = 1 \\ d(m+p) = 54 \end{cases} \Rightarrow m = p+1$ ………….(1p)

$\Rightarrow d(2p+1) = 54$ …………...(2p)

$2p+1 \in \mathbb{N}^*$ număr impar. $D_{54} = \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

Avem posibilităţile:

1. $2p+1 = 3 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow d = 18 \Rightarrow a = 36$; $b = 18$ ....(1p)

2. $2p+1 = 9 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow a = 30$; $b = 24$ ....(1p)

3. $2p+1 = 27 \Rightarrow p = 13 \Rightarrow m = 14 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a = 28$; $b = 26$ ....(1p)

4. a) $n = 2^2+2^4+2^6+...+2^{4026}$ $\quad n = 2^2(1+2^2+2^4)+2^8(1+2^2+2^4)+...+2^{4022}(1+2^2+2^4)$

$n = 21\cdot(2^2+2^8+...+2^{4022})$ $\quad n = 21\cdot 2\cdot(2^1+2^7+...+2^{4021})$ $\quad n = 2\cdot 3\cdot 7\cdot(2^1+2^7+...+2^{4021})$

$2 \mid n$ $\quad 3 \mid n$ $\quad 7 \mid n$ …………(1p) …………(1p) …………(1p)

$U(2^{4i}+2^{4i+2}) = 0 \Rightarrow U(n) = 4 \Rightarrow$ 5 nu divide *n*. …………. (1p)

b) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $|A_1A_i| = 2^2+2^4+...+2^{2(i-1)} = \dfrac{2^{2i}-4}{3}$ …………..(1p)

$M \in (A_kA_{k+1}) \Leftrightarrow |A_1A_k| < \dfrac{1}{2}|A_1A_{2014}| < |A_1A_{k+1}| \Leftrightarrow \dfrac{2^{2k}-4}{3} < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2^{4028}-4}{3} < \dfrac{2^{2k+2}-4}{3}$ ……. (1p)

$2^{2k}-4 < 2^{4027}-2 < 2^{2k+2}-4 \Leftrightarrow 2^{2k} < 2^{4027}+2 < 2^{2k+2} \Rightarrow k = 2013$ ………(1p)

Clasa a VII-a

1. Putem presupune $2 \le x < y < z \Rightarrow y \ge 3,\ z \ge 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2} > \frac{1}{z^2}$ 2p

$\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2} \ge \frac{3}{4};\ \frac{1}{y^2} \le \frac{1}{9} \Rightarrow 1-\frac{1}{y^2} \ge \frac{8}{9};\ \frac{1}{z^2} \le \frac{1}{16} \Rightarrow 1-\frac{1}{z^2} \ge \frac{15}{16}$ 3p

$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right) \ge \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16} = \frac{5}{8}$ 2p

2. $x-y = \frac{1}{z}-\frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz};\ y-z = \frac{1}{x}-\frac{1}{z} = \frac{z-x}{xz};\ z-x = \frac{1}{y}-\frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$ 3p

$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}$ 1p

$(x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1) = 0$ 1p

Deci, $x = y = z$ sau $x^2y^2z^2 = 1$ 1p

Înlocuind în relația din enunț, obținem: $x = y = z = \frac{1}{2}$ 1p

3. a) În ΔBCD, MN este linie mijlocie, iar $MN \cap AC = \{F\}$ 1p

$\Rightarrow OF = FC = OC/2 \Rightarrow$ F mijlocul lui (OC)

Dar F mijlocul lui (MN) $\Rightarrow$ OMCN paralelogram 1p

$AO = 2FO \Rightarrow$ O mijlocul lui (AC)

$ON = DC/2$ și $ON = AB/2 \Rightarrow DC = AB$ 1p

Dar $ON \parallel DC$ și $ON \parallel AB \Rightarrow AB \parallel DC \Rightarrow$ ABCD paralelogram 1p

b) În ΔACD, AM și DO mediane $\Rightarrow$ E centru de greutate 1p

$\Rightarrow AE = 2EM$ și cum $PE = AE/4 \Rightarrow AP = PM$ 1p

$\Rightarrow PO \parallel DC$, dar cum $ON \parallel DC \Rightarrow$ P, O, N coliniare 1p

4. a) $\Delta AGC \equiv \Delta MGP$; $\Delta AGB \equiv \Delta MGN$ și $\Delta BGC \equiv \Delta NGP$ (L.U.L.) 1p

$\Rightarrow [AC] \equiv [MP]$; $[AB] \equiv [MN]$; $BC] \equiv [NP] \Rightarrow \Delta AGC \equiv \Delta MGP$ (L.L.L.) 1p

b) Justificare ABMN dreptunghi dacă $AC = BC$ (ΔABC isoscel) 2p

c) $AB + BC + AC = MN + PM + PN < 2(GM + GN + GP) < 3(GM + GN + GP)$ 1p

$GM = AG = 2/3$ din mediana $AD < 2/3\ (AB + AC) : 2 = (AB + AC) : 3$ 1p

Analog, $GN < (AB + BC) : 3$ si $GP < (AC + BC) : 3$

Deci, $3(GM + GN + GP) < 2(AB + BC + AC)$ 1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Clasa a VIII –a

1. Înmulţind relaţia cu 2 şi trecând toţi termenii în membrul stâng, se obţine:
$2x^2+2y^2-2x-2y-2xy=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$. 2p
Din $(x-y)^2 \le 2$ şi x, y numere naturale deducem că $x-y=0$ sau $|x-y|=1$. 1p
Dacă $x-y=0$, atunci $x=y$ şi relaţia devine $2(x-1)^2=2 \Rightarrow x=y=2$ 2p
Dacă $|x-y|=1$, atunci relaţia dată devine $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ şi de aici obţinem
$x=2, y=1$ sau $x=1, y=2$. 2p

2. **a)** Scrie inegalităţile $n \le x_1 < n+1, ..., 2n-1 \le x_n < 2n$ 1p
Le adună şi obţine $n+n+1+...+2n-1 \le x_1+x_2+...+x_n < n+1+n+2+...+2n$ 1p
Se scrie mai simplu $\frac{(3n-1)\cdot n}{2} \le x_1+x_2+...+x_n < \frac{(3n+1)\cdot n}{2}$ 1p
Află numărul valorilor posibile n. 1p
b) Recunoaşte valoarea maximă $\frac{(3n+1)\cdot n}{2}-1$ 1p
Scrie ecuaţia sub forma $3n^2+n-80=0$ 1p
Finalizare $n=5$ 1p

3. Din α // (BCD) $\Rightarrow$ MN // BC, NP // CD, PM // DB 2p
Şi aplicând teorema lui Thales în triunghiurile ABC, ACD, ADB se obţin:
$\frac{AP}{AN}=\frac{AD}{AC}$, $\frac{AP}{AM}=\frac{AD}{AB}$, $\frac{MB}{PD}=\frac{AB}{AD}$, $\frac{NC}{PD}=\frac{AC}{AD}$ 2p
Însumând rezultă: $AP\left(\frac{1}{AN}+\frac{1}{AM}\right)+\frac{MB+NC}{PD}=\frac{AP}{AN}+\frac{AP}{AM}+\frac{MB}{PD}+\frac{NC}{PD}=$
$=\frac{AD}{AC}+\frac{AD}{AB}+\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AD} \ge 2+2=4$ 3p

4. **a)** Notăm AB = a, BC = b, AA' = c. Din C'N // D'A , C'N = $\frac{D'A}{2}$ $\Rightarrow$AN $\cap$ D'C' = {R} $\subset \alpha$ şi C'R = D'C' = a , MR $\cap$ B'C' = {P} ……………..………………………………… 1p
Fie MQ $\perp$ D'C' , aplicând T.f.a. se obţine $\Delta C'PR \sim \Delta QMR \Rightarrow \frac{C'R}{RQ}=\frac{C'P}{QM}$
$\Rightarrow \frac{a}{\frac{3a}{2}}=\frac{2}{3}=\frac{C'P}{\frac{b}{2}} \Rightarrow C'P=\frac{b}{3} \Rightarrow \frac{C'P}{B'P}=\frac{\frac{b}{3}}{\frac{2b}{3}}=\frac{1}{2}$ ………………………………………………… 2p
Fie PM $\cap$A'D' ={T}, PN $\cap$BC = {S}, cum (ABC) // (A'B'C') şi (ADA') // (BCB'), rezultă că intersecţia paralelipipedului cu planul α este paralelogramul ASPT. ………………….. 1p
b) Dacă prin absurd, ASPT ar fi dreptunghi $\Rightarrow$ PT $\perp$AT, dar PT$\perp$AA' (din AA' $\perp$(A'B'C') şi PT$\subset$(A'B'C')) $\Rightarrow$ PT $\perp$ (ADA') $\Rightarrow$ PT $\perp$A'D' – imposibil, pentru că în ΔRD'T, RD' $\perp$A'D'. ……………………………………………………………...………………… 1p
c) [C'P] – linie mijlocie în ΔRD'T $\Rightarrow$D'T = $\frac{2a}{3}$ $\Rightarrow$PT = $\sqrt{\frac{a^2}{9}+a^2}=\sqrt{\frac{10a^2}{9}}$, analog se obţine că PS = $\sqrt{\frac{10a^2}{9}}$. ……………………………………………………….......………….. 1p
$\Rightarrow A_{ASPT}=\sqrt{\frac{10a^2}{9}}\cdot\sqrt{\frac{10a^2}{9}}\cdot\sin u<\frac{10a^2}{9}$, pentru că în paralelogramul ASPT, ce nu este dreptunghi, $u<90^0$ şi deci $\sin u<1$. ……………………………………………………………..……………... 1p