

CONCURSUL “VERTICAL”
Editia I – 20-ianuarie 2007
CLASA A-VI –A

- I. 1.Determinați numerele prime a,b,c care verifică
 $19a+20b+21c=531$
2.Rezolvați ecuația
$$\frac{(2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^{n+2}) \cdot x}{3^{n+2} \cdot 2^n + 3^{n+1} \cdot 2^{n+2} + 5 \cdot 2^{n+3} \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{60 \cdot 61} - \frac{37}{61}, \quad x \in N.$$
- II. Arătați că numărul $a = 2^n \cdot 5^{n+1}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.
- III. Se dau punctele coliniare A,B,C,D distincte, în această ordine astfel că $4AB+5AD=9AC$ și $BD=18\text{cm}$.
a)Să se afle lungimiile segmentelor BC și CD
b)Dacă M este mijlocul segmentului AD și $M \in (BC)$ precizați valorile minimă și maximă exprimate în numere naturale a lungimii segmentului AD
c)Demonstrați că $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

CONCURSUL "VERTICAL"
Editia I – 20-ianuarie 2007
CLASA A-V –A

I. Se dau numerele

$$a = (2^{20} : 4^5 - 1024 + 10^2 - 2^6 - 6^2)^{2007} + 2007^2 - 2006 \cdot 2007 :$$

$$b = 2 \cdot 10^3 + 1 - 2^4 \cdot 5^3$$

$$c = 2^4 \cdot 5^3 : \left\{ \left[3^2 - 2^3 \cdot 11 : \left((3^2 \cdot 5 - 3^2)^3 : (2 \cdot 3)^4 : 2 - 2^4 \cdot 2007^0 \cdot 1^{2007} \right) \right] \right\}$$

1. Calculați $(a - 2006 \cdot b)^{2007}$.

2. Arătați că $2008 \cdot (a + b)$ este pătrat perfect.

3. Demonstrați că $2005 \cdot b + 401 \cdot c$ este multiplu de 7.

II. 1 Fie numerele

$$a = (n-1)(1+n+n^2+\dots+n^{2007})$$

$$b = (n^2-1)(1+n^2+n^4+\dots+n^{2006}), n \in N \setminus \{0,1\}.$$

Aflați valoarea logică a propoziției $a=b$, când $n=2$.

2 Justificați dacă există $x, y \in N$, astfel ca $5 \cdot x^4 + 4 \cdot y^4 = 7^{21}$.

3 Dacă $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ (in baza 10) și $(a+c)+b = \overline{AB}$, arătați că $(a+c) \cdot b = \overline{BA}$.

II. Dacă $A = \{a, b, c\}$, unde a, b, c sunt numere naturale a căror sumă este 228 și dacă împartim primul număr la al doilea și apoi al treilea număr la primul obținem de fiecare dată catul 4 și restul 3 și $B = \{x \in N \mid x = 5 \cdot k + 3, k \in N, k \leq 8\}$,

1. Arătați că A și B nu sunt disjuncte.

2. Determinați $k \in N$, astfel încat $A \cap B = \Phi$.

CONCURSUL “VERTICAL”
Editia I – 20-ianuarie 2007
CLASA A IV –A

- I. Determinați necunoscutele:
- a) $[(a + 3 - 207 : 3) \times 3 - 2007] : 3 - 27 : 3 - 3 : 3 - 7 = 2007$
- b) $(d+b)+(b+d)=c-200$
 $c-(d+b)-200=4800$ aflat pe b,c si d
 $d : 5 = b$
- c) Să se afle câtul împărțirii lui a la b dacă: $a \cdot [(2 + 3 \times 4) : 7 + 8 : (6 - 4 : 2)] = 4 \times b$
- II. Notăm cu „m” suma a două numere naturale.Catul împărțirii numărului mai mare la cel mai mic este 6, iar restul „r”.Să se exprime în funcție de “m” și „r” fiecare număr.
- III. În trei pușculițe se află 925 lei.ce sumă se află în fiecare pușculiță,dacă la fiecare 3 lei din prima pușculiță revin 5 lei din cea de-a doua,iar la fiecare 100 lei din a doua pușculiță,există 25 lei în a treia pușculiță.

CONCURSUL “VERTICAL”
Editia I – 20-ianuarie 2007
CLASA A VIII –A

- I. Pentru $a \in R$ considerăm expresia $E(x) = a^2 \cdot (1 - x^2) + 2 \cdot a \cdot (1 + x^2) + 1$. Arătați că:
- a) $E(0) \geq 0$.
 - b) Există $a \in R$ astfel încat $E(x) \leq 0$ pentru orice $x \in R$.
- II. a) Dați exemplu de 2007 numere reale distincte astfel încat suma oricăror 2006 numere dintre acestea să fie număr irațional.
b) Se consideră 2007 numere reale distincte astfel încat suma oricăror 2006 numere dintre acestea este număr rațional. Să se arate că toate numerele sunt raționale.
- III. Se consideră piramida VABC cu baza triunghiul echilateral ABC și punctele $M \in [AB]$,
 $N \in [BC]$, $P \in [CA]$ astfel încat $AM = BN = CP$. Să se arate că:
- a) Triunghiul MNP este echilateral.
 - b) Dacă $VM = VN = VP$ atunci $VA = VB = VC$

CONCURSUL "VERTICAL"
Editia I – 20-ianuarie 2007
CLASA A VII –A

- I. Fie numerele întregi a, b, c cu proprietatea $2a - 5b + 6c = 0$. Să se arate că:
- b este număr par
 - $a - 2c$ se divide cu 5.

- II. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- Dați exemple de $2n$ numere întregi nenule $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ astfel încât

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

- b) Să se determine numerele întregi a și b astfel încât să se verifice egalitatea:

$$a(1-b) \cdot (-1)^{k(k+1)} - (b-a) \cdot (-1)^{2k+1} + a \cdot (-1)^{2k+2} - b + 1 = 0 \forall k \in \mathbb{N}$$

- III. Se consideră triunghiurile ABC și MNP cu proprietățile:
 $AB = MN$, $AC = MP$ și $m(\angle BAC) + m(\angle NMP) = 180$.

Fie A^1 mijlocul lui $[BC]$ și M^1 mijlocul lui $[NP]$. Să se arate că:

- Dacă $\angle BAC \equiv \angle NMP$ atunci $AA^1 \equiv MM^1$.
- Dacă $AA^1 \equiv MM^1$ atunci $\angle BAC \equiv \angle NMP$.