

**CONCURSUL CENTRULUI DE EXCELENȚĂ
SATU MARE, EDIȚIA I, 10 mai 2014**

Clasa a V-a

- 1) Fie $\overline{ab}, \overline{cd}$ două numere de două cifre. Spunem că \overline{cd} este colaborator al numărului \overline{ab} dacă $\overline{ab} \neq \overline{cd}$ și $\overline{ab}, \overline{cd}$ îl divid pe \overline{abcd} .
- Demonstrați că 16 este colaborator al lui 80.
 - Determinați mulțimea colaboratorilor numărului 80.
 - Care este cel mai mic număr de două cifre care nu are niciun colaborator?

Prelucrare din Gazeta Matematică

- 2) Fred Flinstone și Barney Rubble joacă "1001 pietricele": ei golesc pe masă un săculeț cu 1001 pietricele numerotate de la 1 la 1001 și aleg alternativ câte o pietricică, pe care apoi o pun înapoi în sac. Cel care ia primul o pietricică al cărei număr se divide cu 2 sau cu 5 pierde jocul.

Ca de obicei, cel care a ales prima pietricică a fost Fred. Imitându-l pe tatăl său, micuța Pebbles, care cunoaște cifrele 1 și 2, a luat și ea de pe masă o pietricică numerotată cu una din aceste două cifre și a pus-o în sac.

Cei doi au continuat jocul, iar Fred, deși era sigur că o să câștige și de această dată, a fost învins de Barney.

Ce număr a avut pietricica pusă de Pebbles în sac?

- 3) Andrei și Adi sunt colegi de clasă. Andrei are de patru ori mai mulți colegi decât colege, iar Adi are cu 17 colegi mai mulți decât colege.

- Ce este Adi: băiat sau fată?
- Câți elevi sunt în clasa lui Andrei și Adi?

Timp de lucru: 2 ore.

**CONCURSUL CENTRULUI DE EXCELENȚĂ
SATU MARE, EDIȚIA I, 10 mai 2014**

Clasa a VI-a

1) Notăm cu A mulțimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulțimii $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$.

Demonstrați că dacă $k \in B$ are proprietatea că există $p \in A$ astfel încât $k \cdot p \in A$, atunci $k = 1$.

Prelucreare din Gazeta Matematică

2) Populația regatului Fibonacci din Planeta Numerelor este alcătuită din numerele naturale n de cel puțin 3 cifre cu proprietatea că fiecare cifră a lui n , începând cu a 3-a, este egală cu suma precedentelor două cifre ale sale.

Regele este cel mai mare multiplu de 15, iar Consiliul Coroanei este format din toate numerele de 6 cifre.

a) Câți membri are Consiliul Coroanei?

b) Cine este regele?

3) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ se consideră înălțimea $[AA']$. Fie A'' simetricul lui A' față de A și H mijlocul lui $[AA']$.

Demonstrați că H este ortocentrul triunghiului $A''BC$.

Timp de lucru: 2 ore.

**CONCURSUL CENTRULUI DE EXCELENȚĂ
SATU MARE, EDIȚIA I, 10 mai 2014**

Clasa a VII-a

1) Numerele naturale impare se împart în grupe de 1, 2, 3, 4, ..., n numere consecutive astfel:

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

a) Demonstrați că suma numerelor din cea de-a n -a grupă este n^3 .
(*Problema lui Nicomah din Gerasa*)

b) Demonstrați identitatea:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2) a) Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° lungimea bisectoarei unghiului de 30° este de două ori mai mare decât lungimea bisectoarei unghiului drept.

b) În triunghiul ABC se cunosc $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 30^\circ$ și $BC = 2$.

Arătați că lungimea bisectoarei unghiului A este $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Prelucrare din Gazeta Matematică

3) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma $1! + 2! + \dots + n!$.

a) Aflați numerele n cu proprietatea că S_n se divide cu 27.

b) Aflați numerele n pentru care S_n este cub perfect.

Timp de lucru: 2 ore.

**CONCURSUL CENTRULUI DE EXCELENȚĂ
SATU MARE, EDIȚIA I, 10 mai 2014**

Clasa a VIII-a

- 1) a) Arătați că nu există numere întregi a, b, c astfel încât

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 2013.$$

- b) Există numere naturale nenule n astfel încât

$$(a - b)^n + (b - c)^n + (c - a)^n = 2013?$$

Prelucrare din Gazeta Matematică

- 2) Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 1$. O dreaptă d care conține mijlocul E al muchiei $[D' C']$ intersectează dreptele AD' și $A' B$, ultima în F .

Aflați EF .

- 3) Pentru a-și demonstra abilitățile de calcul mintal, iepurașul Bugs Bunny a calculat în doar 10 secunde suma $1 + 2 + \dots + 2^{129}$ și i-a spus rezultatul lui Daffy Duck.

După ce s-a convins (cu ajutorul computerului) că rezultatul este corect, rățoiul Daffy a modificat acest număr, punând alternativ între cifrele sale semnele de scădere și adunare: între prima și a doua cifră semnul "-", între a doua și a treia semnul "+", între a 3-a și a patra semnul "-" și așa mai departe până la sfârșit.

Bugs Bunny a calculat instantaneu suma alternantă, obținând un număr pozitiv pe care i l-a transmis lui Daffy Duck.

Acesta a modificat după aceeași regulă numărul primit, cerându-i lui Bugs Bunny să calculeze și noua sumă alternantă.

- a) Câte cifre are primul rezultat al lui Bugs Bunny?
b) Ce răspuns îi va comunica Bugs Bunny lui Daffy Duck?

Timp de lucru: 2 ore.