CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediţia a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

CLASA a V-a

1. Există numere $\overline{abcd}$, cu proprietatea că $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=2014$?

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

2. Să se demonstreze că numărul $A=\underbrace{\overline{abbabb...abb}}_{2016\text{ cifre}}$ nu poate fi pătrat perfect.

Simona Slobodeanu, profesor, Brăila

3. 9 numere naturale, fiecare cu cel mult două cifre, termeni consecutivi ai şirului

4, 9, 14, 19, 24, ...,

au suma egală cu un cub perfect. Aşezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 3 linii şi 3 coloane se poate obţine o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificaţi răspunsul.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

CLASA a VI-a

1. Determinaţi numerele a, b, c, d, e, ştiind că sunt măsurile unghiurilor din jurul unui punct şi sunt îndeplinite condiţiile :

- numerele $0,75\cdot a;\ 0,6\cdot b;\ 0,(3)\cdot c$ sunt direct proporţionale cu numerele 3; 3 şi 2;
- numerele $0,8(3)\cdot c;\ 0,(5)\cdot d;\ 0,2(7)\cdot e$ sunt invers proporţionale cu numerele 2; 2 şi 3.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

2. Dacă unui număr natural nenul A îi efectuăm următoarele transformări:

- fiecare cifră mai mică decât 5 (dacă există) creşte cu 1,
- fiecare cifră cel puţin egală cu 5 (dacă există) descreşte cu 1,

obţinem numărul natural B şi spunem astfel că A este *prieten* al lui B.

a) Determinaţi numărul *prietenilor* lui 2014. Justificaţi răspunsul dat.

b) Arătaţi că numărul *prietenilor* numărului $\underbrace{456456...456}_{\text{de }1007\text{ ori }456}$ este pătrat perfect.

Marius Damian, profesor, Brăila

3. Se dau mulţimile:

$$A=\left\{p\in\mathbb{N}\ \middle|\ p\text{ prim, } p^6+6^p=945\right\}\text{ şi } B=\left\{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \middle|\ p\text{ prim, } p^6+6^p=6n+945\right\}.$$

Să se demonstreze egalitatea: $\text{Card}\,A=\text{Card}\,B$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediţia a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

CLASA a VII-a

1. Fie expresia $E(a,b)=\frac{2a+5}{a+4}+\frac{3b+1}{2b+3}$.

a) Să se arate că $2-\frac{3}{a+4}=\frac{2a+5}{a+4}$.

b) Să se determine a,b numere întregi astfel încât $E(a,b)=2$.

c) Dacă a,b sunt numere naturale, să se determine elementele mulțimii

$$M=\{E(a,b)\ \big|\ E(a,b)\in\mathbb{N}\}.$$

Enache Pătrașcu, profesor, Focșani

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB>CD$ și fie punctele $E\in(BC)$, $F\in(AD)$ astfel încât $BE=DF$. Notăm cu M mijlocul segmentului $[EF]$ și cu P punctul de intersecție a dreptelor CM și AB. Demonstrați că $CF \parallel EP$.

Marius Damian, profesor, Brăila

3. 16 numere naturale consecutive, de câte două cifre, au suma egală cu un cub perfect. Așezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 4 linii și 4 coloane, se poate obține o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificați răspunsul!

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

CLASA A VIII-A

1. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu muchia bazei $AB=a$ notăm M cu mijlocul muchiei $[CV]$. Dacă $m(\measuredangle MBC)=30^0$, aflaţi distanţa de la A la dreapta BM.

Gazeta matematică

2. Aflaţi x şi y numere întregi care verifică relaţia $xy=3\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

3. Fie $a_1,a_2,...,a_n$ numere reale strict pozitive, $n\geq 2$ Demonstraţi că:

$$\frac{na_1+4}{n^2(a_2+a_3+...+a_n)}+\frac{na_2+4}{n^2(a_1+a_3+...+a_n)}+...+\frac{na_n+4}{n^2(a_1+a_2+...+a_{n-1})}\geq\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n+4}{(n-1)(a_1+a_2+a_3+...+a_n)}.$$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

SOLUȚII, CLASA A V-A

1. Soluție. Adunând unitățile, adică, $d+d+d+d$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 4.

Avem următoarele cazuri :

I) $d=1$; adunând zecile, adică, $c+c+c$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 1. Rezultă că $c=7$ și avem suma zecilor egală cu 21, adică două sute plus o zece ; adunând sutele, adică, $b+b+2$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 0 .

Rezultă că avem cazurile :

a) $b=4$; astfel vom avea $4+4+2=10$, deci, scriem 0 și vom avea $a+1=2$, deci $a=1$. Astfel, am obținut numărul 1471 .

b) $b=9$; astfel vom avea $9+9+2=20$, deci, scriem 0 și vom avea $a+2=2$, deci $a=0$. Acest caz nu poate avea loc .

II) $d=6$; avem, deci, $6+6+6+6=24$; scriem 4 și adunăm zecile : $c+c+c+2$, care tebuie să dea un număr care să se termine cu 1, deci, $c=3$ și avem $3+3+3+2=11$. Scriem 1 și adunăm sutele : $b+b+1$, care trebuie să dea un număr care să se termine cu 0 . Acest caz nu poate avea loc .

În concluzie, precizăm că există numărul 1471, pentru care avem:

$$1471+471+71+1=2014.$$

2. Soluție. Se poate scrie

$$A=\overline{abb}\cdot\left(10^{2013}+10^{2010}+...+10^{9}+10^{6}+10^{3}+1\right)=$$

$$=\overline{abb}\cdot\left[10^{2010}\left(10^{3}+1\right)+10^{2004}\left(10^{3}+1\right)+...+10^{6}\left(10^{3}+1\right)+\left(10^{3}+1\right)\right]=$$

$$=\overline{abb}\cdot\left(10^{3}+1\right)\cdot\left(10^{2010}+10^{2004}+...+10^{6}+1\right)=\overline{abb}\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot\left(10^{2010}+10^{2004}+...+10^{6}+1\right).$$

Ținând cont că $10^{6k}\equiv\left(10^{6}\right)^{k}\equiv 1^{k}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$, obținem

$$10^{2010}+10^{2004}+...+10^{6}+1\equiv\underbrace{1+1+...+1+1}_{\text{de 336 de ori 1}}\equiv 336\equiv 6\left(\mathrm{mod}\,11\right).$$

Cum $\overline{abb}\equiv 100a+11b\equiv a+99a+11b\equiv a\left(\mathrm{mod}\,11\right)\Rightarrow\overline{abb}$ nedivizibil cu 11, deoarece $a\neq 0$.

Am dedus astfel că numărul A este divizibil cu 11, dar nu este divizibil cu 11^2, ceea ce spune că nu poate fi pătrat perfect.

3. Soluție. Notăm primul număr cu $5k-1$, $k\geq 1\Rightarrow$ ultimul număr este $5k+39$, $5k+39\leq 99\Rightarrow 5k\leq 60\Rightarrow k\leq 12$. Suma lor este $S=\dfrac{\left(5k-1+5k+39\right)\cdot 9}{2}=\left(5k+19\right)\cdot 9.$

Avem $1\leq k\leq 12\Leftrightarrow 5\leq 5k\leq 60\Leftrightarrow 24\leq 5k+19\leq 79\Leftrightarrow 216\leq\left(5k+19\right)\cdot 9\leq 711$ și fiind un cub perfect, $\left(5k+19\right)\cdot 9\in\left\{6^3,7^3,8^3\right\}$.

Doar 6^3 este divizibil cu $9\Rightarrow\left(5k+19\right)\cdot 9=6^3\Rightarrow 5k+19=24\Rightarrow k=1$ și cele 9 numere sunt $4=2^2$, $9=3^2$, $14=2\cdot 7$, $19=$ nr. prim, $24=2^3\cdot 3$, $29=$ nr. prim, $34=2\cdot 17$, $39=3\cdot 13$, $44=2^2\cdot 11$.

Presupunem prin reducere la absurd că există o linie (demonstrație analoagă pentru coloană) cu produsul P al elementelor egal cu un pătrat perfect și notăm cu L mulțimea formată din cele 3 numere de pe acea linie.

1. Dacă $14\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 7 și P nedivizibil cu 7^2.
2. Dacă $19\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 19 și P nedivizibil cu 19^2.
3. Dacă $29\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 29 și P nedivizibil cu 29^2.
4. Dacă $34\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 17 și P nedivizibil cu 17^2.
5. Dacă $39\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 13 și P nedivizibil cu 13^2.
6. Dacă $44\in L\Rightarrow P$ divizibil cu 11 și P nedivizibil cu 11^2.

În cele 6 cazuri P nu este pătrat perfect, deci rămân doar 3 numere care se pot afla în mulțimea L, adică $L=\left\{4,9,24\right\}\Rightarrow P=2^2\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 3=2^5\cdot 3^3$ care nu este pătrat perfect.

Deci nu există niciun caz în care P să fie pătrat perfect.

SOLUȚII, CLASA A VI-A

1. Soluție. Din prima condiție rezultă:

$$\frac{0,75a}{3}=\frac{0,6b}{3}=\frac{0,(3)c}{2} \Leftrightarrow \frac{75a}{300}=\frac{6b}{30}=\frac{3c}{18} \Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6} \quad (1)$$

Din a doua condiție rezultă :

$$2\cdot 0,8(3)c=2\cdot 0,(5)d=3\cdot 0,2(7)e \Leftrightarrow 2\cdot\frac{75c}{90}=2\cdot\frac{5d}{9}=3\cdot\frac{25e}{90} \Leftrightarrow \frac{5c}{3}=\frac{10d}{9}=\frac{5e}{6} \quad (2).$$

Înmulțind egalitățile (2) cu $\frac{1}{10}$, obținem : $\frac{c}{6}=\frac{d}{9}=\frac{e}{12}$ (3) .

Din (1) și (3) rezultă șirul de rapoarte egale : $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=\frac{d}{9}=\frac{e}{12}=\frac{360^0}{36}=10^0$

şi, astfel, obținem : $a=40^0$, $b=50^0$, $c=60^0$, $d=90^0$, $e=120^0$.

2. Soluție. a) Numărul prietenilor lui 2014 este 0. Într-adevăr, dacă 2014 ar avea un prieten, acesta ar fi de forma $\overline{abcd}$.

Dacă $b\in\{0,1,2,3,4\}$, atunci b se transformă în $b+1\neq 0$, iar dacă $b\in\{5,6,7,8,9\}$, atunci b se transformă în $b-1\neq 0$. Concluzia este că 2014 nu are prieteni.

b) Un prieten al lui $\underbrace{456456...456}_{\text{de 1007 ori 456}}$ are forma $\overline{a_1a_2a_3...a_{3019}a_{3020}a_{3021}}$.

Conform regulilor impuse de problemă, deducem că:

- fiecare dintre cifrele $a_1,a_4,...,a_{3019}$ trebuie să fie egală cu 3 sau cu 5, deci există $\underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{1007}=2^{1007}$ moduri de alegere a cifrelor $a_1,a_4,...,a_{3019}$;
- fiecare dintre cifrele $a_2,a_5,...,a_{3020}$ trebuie să fie egală cu 4 sau cu 6, deci există $\underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{1007}=2^{1007}$ moduri de alegere a cifrelor $a_2,a_5,...,a_{3020}$.
- fiecare dintre cifrele $a_3,a_6,...,a_{3021}$. trebuie să fie egală cu 7, deci există un singur mod de alegere a cifrelor $a_3,a_6,...,a_{3021}$.

În final, conform regulii produsului, deducem că numărul prietenilor lui $\underbrace{456456...456}_{\text{de 1007 ori 456}}$ este egal cu $2^{1007}\cdot 2^{1007}\cdot 1=\left(2^{1007}\right)^2$.

3. Soluție. Pentru $p=3\Rightarrow p^6+6^p=3^6+6^3=729+216=945.$

Pentru $p>3\Rightarrow p^6+6^p>3^6+6^3=945$ și pentru $p<3$ (adică $p=2$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow p^6+6^p<3^6+6^3=945.$ Deci $A=\{3\}\Rightarrow \text{Card}\,A=1.$

Vom demonstra că și $\text{Card}\,B=1.$

Pentru $p=2,$ avem:

$$2^6+6^2=6n+945\Leftrightarrow 64+36=6n+945\Leftrightarrow 6n=-845\Leftrightarrow n=-\frac{845}{6}\notin\mathbb{N}.$$

Pentru $p=3,$ avem:

$$3^6+6^3=6n+945\Leftrightarrow 945=6n+945\Leftrightarrow n=0\in\mathbb{N}\Rightarrow (0,3)\in B.$$

Pentru $p\geq 5,$ p prim, avem:

$$p\in\mathcal{M}_6+1 \text{ sau } p\in\mathcal{M}_6+5\Rightarrow p^2\in\mathcal{M}_6+1\Rightarrow p^6\in\mathcal{M}_6+1\Rightarrow p^6+6^p\in\mathcal{M}_6+1.$$

Dar $6n+945=6n+942+3\in\mathcal{M}_6+3,$ deci egalitatea $p^6+6^p=6n+945$ nu poate avea loc.

Rezultă că $B=\{(0,3)\}\Rightarrow \text{Card}\,B=1\Rightarrow \text{Card}\,A=\text{Card}\,B.$

SOLUȚII, CLASA A VII-A

1. Soluție. a) Calcul direct.

b) $E(a,b)=2 \Rightarrow 2-\dfrac{3}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}=2 \Rightarrow \dfrac{3}{a+4}=\dfrac{3b+1}{2b+3} \Rightarrow a+4=\dfrac{3(2b+3)}{3b+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=-4+\dfrac{6b+9}{3b+1}=-4+\dfrac{6b+2+7}{3b+1}=-4+2+\dfrac{7}{3b+1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow 3b+1\in\{-7,-1,1,7\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b\in\{0,6\} \Rightarrow b\in\{0,2\}$. Apar situațiile:

- $b=0 \Rightarrow a=-2+7=5;$
- $b=2 \Rightarrow a=-2+1=-1,$

deci ecuația are exact două soluții: $(a,b)=(5,0)$ și $(a,b)=(-1,2)$.

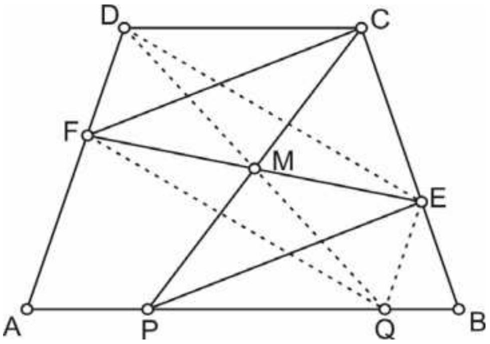
c) Căutăm $a,b\in\mathbb{N}$ astfel încât $E(a,b)=\dfrac{2a+5}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}\in\mathbb{N}$. Evaluăm cei doi termeni ai sumei:

- $1<\dfrac{2a+5}{a+4}<2 \Leftrightarrow a+4<2a+5<2a+8,$ evident;
- $0<\dfrac{3b+1}{2b+3}<2 \Leftrightarrow 0<3b+1<4b+6,$ evident.

Atunci $1<\dfrac{2a+5}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}<4$ și cum $\dfrac{2a+5}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}$ trebuie să fie număr natural, ar trebuie să existe $a,b\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{2a+5}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}=2$ sau $\dfrac{2a+5}{a+4}+\dfrac{3b+1}{2b+3}=3.$

Ținând cont că $E(5,0)=2$ și $E(9,5)=3,$ adică valorile 2 și 3 sunt atinse, rezultă că $M=\{2,3\}$.

2. Soluție. Construim $EQ \parallel AD,\ Q\in AB.$



Atunci $\sphericalangle EQB \equiv \sphericalangle DAB$ (corespondente) și cum trapezul $ABCD$ este isoscel, avem $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Deducem că $\sphericalangle EQB \equiv \sphericalangle EBQ,$ deci ΔEQB este isoscel cu $EQ=EB$ și cum din ipoteză $DF=EB,$ obținem $DF=EQ.$

Din $DF \parallel EQ$ și $DF=EQ$ rezultă că $DFQE$ este paralelogram, deci prin mijlocul M al diagonalei $[EF]$ trece și diagonala $[DQ]$.

Deducem acum că $\Delta MCD \equiv \Delta MPQ$ (U.L.U.) și astfel $CM=MP$ care împreună cu $EM=MF$ implică $CEPF$ paralelogram, deci $CF \parallel EP.$

3. Soluție. Notăm cu $n, n+1, n+2, ..., n+15$ numerele cu suma

$$S = n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+15) = \frac{(n+n+15)\cdot 16}{2} = (2n+15)\cdot 8,$$

de unde rezultă că $2n+15$ este cub perfect impar.

Avem $n \geq 10$ și $n+15 \leq 99 \Rightarrow 10 \leq n \leq 84 \Rightarrow 20 \leq 2n \leq 168 \Rightarrow$ $\Rightarrow 35 \leq 2n+15 \leq 183 \Rightarrow 2n+15 = 125 \Rightarrow n = 45$ și cele 16 numere sunt: $55 = 5\cdot 11$, $56 = 2^3\cdot 7$, $57 = 3\cdot 19$, $58 = 2\cdot 29$, $59 =$ nr. prim, $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$, $61 =$ nr. prim, $62 = 2\cdot 31$, $63 = 3^2\cdot 7$, $64 = 2^6 = 8^2$, $65 = 5\cdot 13$, $66 = 2\cdot 3\cdot 11$, $67 =$ nr. prim, $68 = 2^2\cdot 17$, $69 = 3\cdot 23$, $70 = 2\cdot 5\cdot 7$.

Presupunem prin reducere la absurd că există o linie (demonstrație analoagă pentru coloană) cu produsul P al elementelor egal cu un pătrat perfect și notăm cu L mulțimea formată din cele 4 numere de pe acea linie.

Dacă $57 \in L \Rightarrow P \vdots 19$ și P nu este divizibil cu $19^2 \Rightarrow$ P nu este pătrat perfect.

Dacă $58 \in L \Rightarrow P \vdots 29$ și P nu este divizibil cu $29^2 \Rightarrow$ P nu este pătrat perfect și folosim aceeași idee în cazurile $59 \in L$, $61 \in L$, $62 \in L$, $65 \in L$, $67 \in L$, $68 \in L$, $69 \in L$.

Rămân doar 7 numere care se pot afla în mulțimea L, adică 55, 56, 60, 63, 64, 66, 70. Reamintim că $55 = 5\cdot 11$, $56 = 2^3\cdot 7$, $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$, $63 = 3^2\cdot 7$, $64 = 2^6 = 8^2$, $66 = 2\cdot 3\cdot 11$ și $70 = 2\cdot 5\cdot 7$.

Notăm cu $A = \{55, 60, 70\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 5, cu $B = \{56, 63, 70\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 7 și cu $C = \{55, 66\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 11. Fiecare din cele trei mulțimi trebuie să aibă un număr par de elemente pe linia dată, adică 0 sau 2.

I. Dacă L nu conține niciun element din $A \Rightarrow$ $L = \{56, 63, 64, 66\}$ și P nu este pătrat perfect.

II. Dacă L nu conține niciun element din $B \Rightarrow$ $L = \{55, 60, 64, 66\}$, deci $P = 5\cdot 11\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 8^2\cdot 2\cdot 3\cdot 11 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 8^2\cdot 11^2$ și nu este pătrat perfect.

Cazurile I și II nefiind posibile $\Rightarrow A$ și B au câte 2 elemente pe linia dată.

1. Dacă $70 \notin L \Rightarrow L = \{55, 60, 56, 63\} \Rightarrow P$ nu este pătrat perfect.

2. Dacă $70 \in L$ avem:

i) $55, 70 \in L, 60 \notin L$. Din $55 \in L \Rightarrow 66 \in L \Rightarrow 55, 66, 70 \in L$ cu

a) $56 \in L, 63 \notin L \Rightarrow P = 55\cdot 66\cdot 70\cdot 56 = 2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11^2$ care nu este pătrat perfect;

b) $56 \notin L, 63 \in L \Rightarrow P = 55\cdot 66\cdot 70\cdot 63 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11^2$ care nu este pătrat perfect.

ii) $60, 70 \in L, 55 \notin L$. Din $55 \notin L \Rightarrow 66 \notin L$ cu

a) $56 \in L, 63 \notin L \Rightarrow P = 60\cdot 70\cdot 56\cdot 64 = 2^6\cdot 8^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2$ care nu este pătrat perfect;

b) $56 \notin L, 63 \in L \Rightarrow P = 60\cdot 70\cdot 63\cdot 64 = 2^2\cdot 8^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2$ care nu este pătrat perfect.

Deci P nu este pătrat perfect în niciunul din cazurile studiate.

SOLUȚII, CLASA A VIII-A

1. Construim $VN \perp BC\left(N \in (BC)\right)$ și notăm $\{G\} = VN \cap BM$. Observăm G că este centrul de greutate al triunghiului VBC și deci $VG = 2GN$ (1).

În triunghiului BGN avem $m(\measuredangle BNG) = 90^0$ și $m(\measuredangle GBN) = 30^0$ de unde $BG = 2GN$ (2).

Din $(1),(2) \Rightarrow BG = 2VG$ și deci $BM = VN$. Din ultima relație deduce că în triunghiul VBC avem $CV = CB$. Dar $CV = BV$, așadar triunghiul VBC este echilateral. Deci $VABC$ este un tetraedru regulat și astfel $AG \perp (VBC)$. Deci distanța de la A la dreapta BM este lungimea înălțimii tetraedrului regulat de muchie a, adică $AG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

2. Deducem că $x^2 + y^2$ este pătrat perfect deci

$$\sqrt{x^2+y^2} = t \in \mathbb{N} \Rightarrow xy = 3t-3 \Rightarrow (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = t^2+6t-6 = (t+3)^2 - 15 \Rightarrow (x+y)^2 -$$
$$-(t+3)^2 = -15 \Rightarrow (x+y-t-3)(x+y+t+3) = -15; x+y-t-3 < x+y+t+3$$

Cazul 1

$$\begin{cases} x+y-t-3=-1 \\ x+y+t+3=15 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(3,4);(4,3)\}$$

Cazul 2

$$\begin{cases} x+y-t-3=-3 \\ x+y+t+3=5 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,1);(1,0)\}$$

Cazul 3

$$\begin{cases} x+y-t-3=-5 \\ x+y+t+3=3 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,-1);(-1,0)\}$$

Cazul 4

$$\begin{cases} x+y-t-3=-15 \\ x+y+t+3=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(-3,-4);(-4,-3)\}$$

3. Notăm cu $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Atunci avem

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} = \frac{a_1^2}{a_1S-a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_2S-a_2^2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_nS-a_n^2} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)} = .$$

$\dfrac{S^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$, din inegalitatea lui Bergstrom.

Apoi avem

$$\frac{S^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)} \geq \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow (n-1)S^2 \geq nS^2 - n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right) \Leftrightarrow n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right) \geq S^2$$

adevărat din C.B.S..Am arătat,deci,că

$$\frac{na_1}{n^2(a_2+a_3+\ldots+a_n)} + \frac{na_2}{n^2(a_1+a_3+\ldots+a_n)} + \ldots + \frac{na_2}{n^2(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})} \geq \frac{1}{n-1}, (1).$$

Din inegalitateta mediilor avem

$$\frac{1}{S-a_1} + \frac{1}{S-a_2} + \ldots + \frac{1}{S-a_n} \geq \frac{n^2}{S-a_1+S-a_2+\ldots+S-a_n} = \frac{n^2}{(n-1)S}$$; deci rezultă că

$$\frac{4}{n^2(a_2+a_3+\ldots+a_n)} + \frac{4}{n^2(a_1+a_3+\ldots+a_n)} + \ldots + \frac{4}{n^2(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})} \geq \frac{4}{n^2}\frac{n^2}{(n-1)S} = \frac{4}{(n-1)S}, (2)$$

Din (1) și (2) avem

$$\frac{na_1+4}{n^2(a_2+a_3+\ldots+a_n)} + \frac{na_2+4}{n^2(a_1+a_3+\ldots+a_n)} + \ldots + \frac{na_2+4}{n^2(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})} \geq \frac{1}{n-1} + \frac{4}{(n-1)S} =$$
$$= \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+4}{(n-1)(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}$$