CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VIITORII MATEMATICIENI"
EDIŢIA a III-a, 12 ianuarie 2008

CLASA a V-a

I. 1. Se dau mulţimile $A = \{x \in N \mid 3 \le 2x+1 < 13\}$; $B = \{y \mid y = x^2 + 6 - 5x, x \in A\}$; $C = \{z \mid z = 3y, y \in B\}$ şi $D = \{t \mid t = x + y, x \in A \text{ şi } y \in B\}$. Calculaţi $A \cap B$; $B \cup C$ şi $(C \cap D) \setminus (B \cup C)$

2. Demonstraţi că există, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $4^4 + 2^{11} + 2^n$ să fie pătrat perfect.

II. Fie numerele:

$a = (3^{27} \cdot 15^{42} \cdot 25^{5}) : (45^{21} \cdot 30^{18} : 4^{18})$

$b = 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 - 2008 \cdot 2010 - 2008^2 \cdot 2009 - 2007 \cdot 2008$

$c = (2^3)^{1004} \cdot 7^{1004}$

a) Calculaţi a, b, c

b) Comparaţi a^b cu c

III. Arătaţi că dublul sumei tuturor numerelor naturale diferite care împărţite la 2007 dau câtul şi restul egale, se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive.

IV. Aflaţi cifrele a, b, c, d şi completaţi căsuţele cu operaţiile de adunare sau scădere astfel încât să obţineţi egalitatea adevărată:

$\overline{aaaa}\ \square\ \overline{bbb}\ \square\ \overline{cc}\ \square\ d = 2008$

Notă: **Timp de lucru 3 ore.**
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VIITORII MATEMATICIENI"
EDIŢIA a III-a, 12 ianuarie 2008

CLASA a VI-a

I. 1. Aflaţi cel mai mare număr natural n astfel încât împărţind numerele 3396, 2131, 1283 respectiv la $4n$, $2n$, n să obţinem respectiv resturile 36, 31, 23.

2. Arătaţi că un număr natural format din 2008 cifre din care jumătate sunt zerouri iar celelalte cifre sunt egale cu 3, nu este pătrat perfect.

II. Se consideră numărul $x = \overline{abcde}$, $a \neq 0$.

a) Aflaţi cel mai mic număr de cinci cifre divizibil cu 7, 11 şi 13.

b) Arătaţi că dacă x este divizibil cu 7, 11 şi13, atunci $100c + \overline{de} = \overline{ab}$.

c) Determinaţi forma numerelor de cinci cifre divizibile cu 7, 11 şi 13.

III. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$, $[OE$, $[OF$ în această ordine în jurul punctului O astfel încât $[OA \perp [OB$; $[OC$ este bisectoarea unghiului $\angle BOD$, $[OF$ semidreapta opusă semidreptei $[OC$, $m(\angle DOE) = 5 \cdot m(\angle EOF)$ şi $m(\angle EOF)\frac{1}{3} = m(\angle COD)$. Aflaţi măsurile unghiurilor EOF şi AOF.

IV. Fie segmentul A_1A_2 de lungime 1. Se consideră apoi segmentele A_2A_3 cu lungimea $\frac{2}{3}$ din A_1A_2, apoi A_3A_4 cu lungimea $\frac{2}{3}$ din A_2A_3 şi aşa mai departe, $A_{2007}A_{2008}$ cu lungimea $\frac{2}{3}$ din $A_{2006}A_{2007}$. Să se arate că $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{2007}A_{2008} < 3$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VIITORII MATEMATICIENI"
EDIŢIA a III-a, 12 ianuarie 2008

CLASA a VII-a

I. Fie $x, y, z, t \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$ astfel încât numerele sunt diferite între ele. Să se arate că:
$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right) > \frac{1561}{2008}$$

II. a) Daţi un exemplu de număr strict pozitiv x care rămâne neschimbat după efectuarea operaţiilor $x-[100x]\cdot\frac{1}{100}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

b) Aflaţi forma numărului pozitiv x ştiind că dacă din el se scade aproximarea lui prin lipsă la sutimi iar rezultatul se înmulţeşte cu 100 se obţine tot numărul x.

III. În Δ ABC, M este mijlocul bisectoarei (AD), $D \in (BC)$ şi fie $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2 \cdot AE$. Să se arate că B, M şi E sunt coliniare dacă şi numai dacă Δ ABC este isoscel.

IV. 1. Fie ABC un triunghi şi O un punct în interiorul său. Paralela prin O la AB taie pe AC în N şi pe BC în P iar paralela prin O la AC taie pe AB în M şi pe BC în Q. Arătaţi $MN \parallel BC$ dacă şi numai dacă $(BP) \equiv (QC)$.

2. Fie dreptele a, b, c şi d distincte astfel încât $a \parallel b$, $c \parallel d$ şi $a \nparallel c$. Construiţi punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ şi $D \in d$ coliniare, astfel încât $(AB) \equiv (CD)$

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VIITORII MATEMATICIENI"
EDIŢIA a III-a, 12 ianuarie 2008

CLASA a VIII-a

I. Fie $a, b \in \mathbf{Q}$, $A = \dfrac{a+\sqrt{5}+2}{a\sqrt{5}-2a+1}$ şi $B = \dfrac{b+\sqrt{5}-2}{b\sqrt{5}+2b+1}$.

a) Calculaţi $A - \sqrt{5}$.

b) Arătaţi că numărul $C = \sqrt{\left(A^2+B^2-13AB\right)n+3AB}$ este număr iraţional $\forall\, n \in N$.

II. Arătaţi că dacă $x \in (0;1)$ şi $y \in (2;3)$ atunci:

a) $\left|x-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$;

b) $2xy - 5x - y + 2 < 0$.

III. Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA΄B΄C΄D΄ astfel încât $AA' \leq \min(AB, BC)$. Notăm cu O centrul dreptunghiului ABCD. Să se demonstreze că paralelipipedul este cub dacă şi numai dacă $C'O \perp A'C$.

IV. Fie ABCD un trapez în care $m(\angle A) = m(\angle B)$, $MA + CD = 7$ şi $MA \perp (ABC)$. Ştiind că baza mare AB = 7, iar BC, CD şi AD **sunt numere naturale** iar aria trapezului ABCD este **maximă**, se cer:

a) Arătaţi că $[MD] \equiv [BC]$;

b) Calculaţi distanţa de la A la planul (MCD).

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.