Concursul interjudetean
"Gheorghe Lazar" – Sibiu – 20.03.2004
Editia a IV-a
Clasa a VII-a

1. Se considera multimea A_n avand toate elementele de forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$ si semnele se aleg in toate modurile posibile.

Consideram $x = \dfrac{n(n+1)}{2}$ si notam cu $B_n = \{-x, -x+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, x-1, x\}$.

a) Sa se arate ca $A_n \subset B_n$.

b) Sa se arate ca $B_n - A_n \neq \varnothing$.

c) Sa se determine numarul de elemente ale multimii $C = \{n \in \{1, 2, \ldots, 2004\} \mid 0 \in A_n\}$.

Marilena Stoica si **Lavinia Savu**

2. Fie $x, y, z \in \mathbf{Z}$ astfel incat $x^2 = y^2 + z^2$.

a) Sa se arate ca exista $p, q \in \mathbf{Z}$ astfel incat $x = p^2 + q^2$ si $\{y, z\} = \{p^2 - q^2, 2pq\}$.

b) Sa se arate ca xyz se divide cu 60.

Marius Radulescu

3. Sa se determine patrulaterele de perimetru minim inscrise intr-un patrat dat.
(Un patrulater P este inscris in alt patrulater Q, daca fiecare varf al patrulaterului P se afla pe cate o latura a patrulaterului Q fiecare latura ale patrulaterului Q contine cate un varf al patrulaterului P).

Manuela Prajea

4. Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$ si H ortocentrul sau. Notam $\{B'\} = BH \cap AC$, $\{C'\} = CH \cap AB$, $\{X\} = B'C' \cap BC$ si M mijlocul segmentului BC.
Sa se arate ca H este ortocentrul triunghiului AXM.

Vasile Pop

Clasa a VIII-a

5. Se considera intervalele nevide $I = (a, b)$ si $J = (c, d)$. Sa se arate ca oricare ar fi perechea $(x_1, y_1) \in I \times J$ exista o pereche $(x_2, y_2) \in I \times J$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, cu proprietatea ca $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$.

Marilena Stoica si **Lavinia Savu**

6. Sa se construiasca o multime cu 20 elemente, numere naturale distincte, cu proprietatea ca patratul sumei elementelor se divide cu suma elementelor din orice submultime.

Gabriel Dospinescu

7. Sa se arate ca oricum am avea 2004 de puncte in spatiu exista o sfera care sa aiba in interior 1002 puncte si sa lase in exterior 1002 puncte.

Lavinia Savu

8. Sa se arate ca exista un plan pe care un tetraedru se proiecteaza dupa un paralelogram.

****

.

Clasa a IX-a

9. a) Sa se arate ca daca $a > 0$ si $\sqrt[n]{a} \in \mathbf{Q}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci $a = 1$.

b) Sa se arate ca daca $a, b \in (0, \infty)$ si $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \in \mathbf{Q}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci $a = b = 1$.

Sorin Radulescu si Ion Savu

10. a) Sa se arate ca $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $k \leq n$.

b) Sa se arate ca $2^n + 1 < 2^{n + \frac{1}{2^{n-1}}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Radu Gologan

11. Punctele unui cerc de raza 1 sunt colorate in 5 culori. Sa se arate ca pe acest cerc exista o infinitate de puncte (A, B) cu A si B de aceeasi culoare, astfel incat $AB \geq 1$.

Florin Vulpescu - Jalea

12. Se considera patrulaterul convex $ABCD$ in care O este intersectia diagonalelor. Notam cu M, N, P, Q proiectiile lui O pe laturile AB, BC, CD si DA. Sa se arate ca patrulaterul $MNPQ$ este circumscriptibil daca si numai daca patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Vasile Pop

.

Clasa a X-a

13. Sa se determine cate numere care se scriu cu n cifre in baza 2, au proprietatea ca suma cifrelor de rang par este egala cu suma cifrelor de rang impar.

Manuela Prajea

14. Se considera numerele complexe $a \neq b$ si multimea $A = \left\{ \left| a^n - b^n \right| \,\middle|\, n \in \mathbf{N}^* \right\}$. Sa se demonstreze ca daca multimea A este finita, atunci $|a| = |b| = 1$ si $0 \in A$.

Gabriel Dospinescu

15. Sa se arate ca in multimea $\{C_n^k \mid 0 \le k \le n \le 2^{2004} - 1\}$ exista exact 3^{2004} numere impare. (Consideram ca $C_0^0 = 1$).

Claudiu Raicu

16. Sa se arate ca, daca punctele unei sfere de raza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se coloreaza in 7 culori, exista o culoare si o lungime $l \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ cu proprietatea ca pe sfera gasim o infinitate de perechi de puncte (A, B), de acea culoare, astfel incat $AB = l$.

Lavinia Savu

.

Clasa a XI-a

1. Se considera matricele $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ si polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f(X) = \det(A + XB)$. Sa se arate ca gradul polinomului f este mai mic sau egal decat rangul matricei B.

Sorin Radulescu

2. Sa se arate ca daca $A, B, C \in M_3(\mathbf{C})$ verifica $A^3 = B^3 = C^3 = O_3$ si comuta intre ele doua cate doua, atunci $ABC = O_3$.

Marius Radulescu

3. Se considera functia $f : \left(0, \frac{p}{6}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = tg\, x\, tg\, 2x\, tg\, 3x$. Sa se arate ca $f^{(n)}(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{p}{6}\right)$ si $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Sorin Radulescu

4. Pentru orice numar natural nenul n, notam cu p_n al n-lea numar prim si cu $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sirul $a_n = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n}$. Admitem cunoscut ca $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_n}{p_n - 1} = \infty$.

a) Sa se arate ca $a_n > \ln\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$.

b) Sa se arate ca $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

c) Sa se partitioneze multimea $\mathbf{N}^*$ in submultimile $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, astfel incat $\sum_{x \in A_k} \frac{1}{x} = \infty$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

Ion Savu

Clasa a XII-a

1. Sa se arate ca orice polinom din $\mathbf{C}[X]$ se scrie ca suma de doua patrate de polinoame din $\mathbf{C}[X]$.

Sorin Radulescu

2. a) Sa se arate ca daca grupurile $(\mathbf{Z}^n,+)$ si $(\mathbf{Z}^p,+)$ sunt izomorfe, unde $n,p\in\mathbf{N}^*$, atunci $n=p$.

b) Sa se arate ca grupurile $(\mathbf{R}^n,+)$ si $(\mathbf{R}^p,+)$ sunt izomorfe, $\forall n,p\in\mathbf{N}^*$

(Am notat prin A^n, multimea $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{de\ n\ ori\ A}$)

Sorin Radulescu si **Ion Savu**

3. Se considera integralele $I_n=\int_0^{2p}\cos x\cos 2x\ldots\cos nx\,dx$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

a) Sa se arate ca $\int_0^{2p}\cos^n kxdx=\int_0^{2p}\cos^n xdx$, $\forall k,n\in\mathbf{N}^*$.

b) Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2p}\cos^n xdx$.

c) Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Ion Savu

4. Se considera numerele $a,b,n\in\mathbf{N}^*$, functiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ si integralele $I_n=\int_0^p f_n(x)\sin xdx$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

a) sa se arate ca $f_n^{(k)}(0)\in\mathbf{Z}$ si $f_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)\in\mathbf{Z}$, $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

b) Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

c) Sa se demonstreze ca numarul p este irational.

Dorin Popovici