

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„GRIGORE c. Moisiil”
Ediția a XX- A , Baia Mare, 11 – 13 MARTIE 2005

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A V – A

Subiectul 1. Aflați numărul $x \in N$ și cifra a astfel încât

$$7^{x-2} + 18 = \overline{1a^2}.$$

Maria S. POP

Subiectul 2. Într- un grup de elevi fiecare discută cu fiecare, o singură dată, timp de 2 minute.

- Dacă grupul este format din 5 elevi, câte minute durează discuțiile?
- Dacă discuțiile durează 10 ore, câți elevi sunt în grup?

Ioana ZELINA

Subiectul 3. În sistemul de numere cu baza 10 să se calculeze suma primelor 11 numere formate folosind o singură cifră.

Enunțați și rezolvați problema în sistemul de numerație cu baza 5.

Ioana ZELINA

Subiectul 4. O cutie paralelipipedică cu dimensiunile $L = 12$ cm, $l = 8$ cm și $I = 4$ cm se umple cu zahăr în formă cubică.

a) Ce dimensiuni, exprimate în numere naturale, au cuburile de zahăr care umplu complet această cutie și câte cuburi sunt necesare?

b) Ce dimensiuni au cutiile cubice ce pot fi umplute (fără a rămâne spații libere) cu bucăți de zahăr cu dimensiunile $L = 12$ cm, $l = 8$ cm și $I = 4$ cm și câte asemenea cutii există?

Ioana ZELINA

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VI A

Subiectul 1. Se dă triunghiul echilateral ABC și punctul $M \in (BC)$. Din M se duce dreapta MP perpendiculară pe dreapta AC ($P \in (AC)$), iar dreapta MP intersectează dreapta AB în D. Să se arate că :

- $MB = BD$
- $AB = 2(CP + BN)$, unde N este mijlocul lui (MD).

GAZETA MATEMATICĂ 6/1997

Subiectul 2. Fie $x, y, z \in Q^*$ astfel încât

$$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{2x+3y}.$$

Să se calculeze:

a) $(x+3y+2z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{2z}\right).$

b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$

Arătați că numărul $n = \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{4z} + \frac{2z}{x}$ este numărul natural.

GAZETA MATEMATICĂ 1/1998

Subiectul 3. Determinați numerele $N = \overline{a} * \overline{b0c}$, unde a, b, c sunt cifre ale sistemului zecimal și $a = b + c$, știind că numerele \overline{a} și $\overline{b0c}$ sunt numere prime.

Gabriella KOVACS

Subiectul 4. Un automobil parcurge drumul din orașul A în orașul B de la ora 8 la ora 11. A doua zi parcurge drumul înapoi de la ora 12. Se știe că automobilul merge cu 60 km/h la urcuș, 75 km/h pe drum drept, 100 km/h la coborâre. Se cere:

- Ce distanță este între orașul A și B ?
- Să se arate că există un loc pe drum prin care automobilul a trecut la aceeași oră în cele două zile.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VII – A

Subiectul 1. Determinați cifrele a, b , $1 < b < 9$ pentru numărul

$$\sqrt{\overbrace{a, a, \dots, a}^{m \text{ cifre}} \left(\overbrace{b, \dots, b}^{n \text{ cifre}} \right) + \overbrace{b, b, \dots, b}^{m \text{ cifre}} \left(\overbrace{a, \dots, a}^{n \text{ cifre}} \right)}$$

este rațional

Maria S. POP

Subiectul 2.

- Demonstrați că pentru orice $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

- Determinați x și y astfel încât

$$\sqrt{x + 147} + \sqrt{y + 27} + \sqrt{126 - x - y} = 30.$$

Maria S. POP, Vasile

POP

Subiectul 3. Pe catetele AC și AB ale triunghiului dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele ABDE și ACFG și fie $DC \cap AB = \{U\}$, iar $BF \cap AC = \{V\}$.

- Arătați că $UV \parallel DF$.
- Dacă $UV \cap BD = \{P\}$ și $UV \cap CF = \{Q\}$, arătați că $DF = PQ + UV$

Dorel

MIHEȚ

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$ și I intersecția bisectoarelor BB' și CC'. Notăm cu M intersecția dreptei BC cu perpendiculara în A pe AI. Să se arate că punctele M, C și B' sunt coliniare.

Vasile POP.

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VIII A

Subiectul 1. Fie $a > 0$. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 + a^{n+1}) = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{2^n})$$

Andrei HORVAT- MARC

Subiectul 2. Fie ABCD un tetredru regulat cu muchia a, înălțimea h, distanța dintre două muchii (opuse) d..

- Să se afle aria secțiunii tetraedrului cu planul determinat de înălțime și o muchie consecutivă cu aceasta.
- Să se arate că $3h = 2d\sqrt{3}$.

Subiectul 3. Fie $x, y > 0$, numere reale, astfel încât $x + y = 1$. Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Gheorghe SZOLLOSY

Subiectul 4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx + cx^2$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Să se arate că dacă $f(-1)$, $f(0)$ și $f(3)$ sunt numere întregi, atunci $f(n^2 - 1)$ este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0; \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_3^2} + \dots + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_1^2} > \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Vasile BERINDE

Subiectul 2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y)), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile POP

Subiectul 3. Fie $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $r \in (0; \infty)$ și sistemul $\begin{cases} x \cos t + y \sin t = r \\ x \sin t + y \cos t = r \end{cases}$.

a) Rezolvați sistemul.

b) Determinați locul geometric al punctelor $S = \{(x; y) \mid (x; y) \text{ este soluția sistemului}\}$.

Ioana
ZELINA

Subiectul 4. Se consideră triunghiul ABC și numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$. Fie B' , C' mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ și punctele $M_n \in [BC]$, $N_n \in [BB']$ astfel încât $\overline{BM_n} = \frac{1}{2n} \overline{BC}$, respectiv $\overline{BN_n} = \frac{1}{n+1} \overline{BB'}$. Să se arate că:

a) Punctele C' , N_n , M_n sunt colineare pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\overline{N_2 M_2} + \overline{N_3 M_3} + \dots + \overline{N_n M_n} = \frac{1}{2} \overline{C' N_2} + \frac{1}{3} \overline{C' N_3} + \dots + \frac{1}{n} \overline{C' N_n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Andrei HORVAT-MARC

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A X-A

Subiectul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_5 y = 2 \\ 3^y - 5^x \geq 118 \\ \log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{5}} y \leq 0 \end{cases}$$

Vasile BERINDE

Subiectul 2. Să se arate că sistemul de inecuații

$$\begin{cases} x_1 * x_2 + y_1 * y_2 < 0 \\ x_1 * x_3 + y_1 * y_3 < 0 \\ x_1 * x_4 + y_1 * y_4 < 0 \\ x_2 * x_3 + y_2 * y_3 < 0 \\ x_2 * x_4 + y_2 * y_4 < 0 \\ x_3 * x_4 + y_3 * y_4 < 0 \end{cases}$$

nu are soluții reale.

Vasile POP

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numărul de soluții $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ al sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} x^{2n+1} - C_{2n+1}^2 * x^{2n-1} * y^2 + C_{2n+1}^4 * x^{2n-3} * y^4 - \dots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n} * x * y^{2n} = a \\ y^{2n+1} - C_{2n+1}^2 * y^{2n-1} * x^2 + C_{2n+1}^4 * y^{2n-3} * x^4 - \dots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n} * y * x^{2n} = b \end{cases}$$

b) Să se arate că, pentru orice soluție $(x; y)$, valoarea sumei $x^2 + y^2$ este aceeași.

Vasile POP

Subiectul 4. a) Să se demonstreze că dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi, atunci avem relațiile:

i) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

ii) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A * \sin B * \sin C$.

c) Fie $[Ox]; [Oy]; [Oz]$ semidrepte necoplanare variabile astfel încât

$$m(\sphericalangle xOy) + m(\sphericalangle yOz) + m(\sphericalangle zOx) = 180^\circ.$$

Dacă $X; Y; Z$ sunt respectiv măsurile unghiurilor diedre dintre planele $(yOz); (zOx); (xOy)$, să se arate că $\cos X + \cos Y + \cos Z = \text{constant}$.

Gheorghe SZOLOSSY

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A XI-A

Subiectul 1 În planul xOy se consideră parabola $(P): y = x^2$ și punctele $A(-1; 1) \in (P); B_0(1; 0) \in Ox$. Se definesc recursiv punctele $A_k \in (P); B_k \in Ox, (k \geq 1)$ în modul următor:

$$\begin{cases} A_{k+1} \text{ este intersecția dreptei } AB_k \text{ cu parabola } (P); \\ B_{k+1} \text{ este proiecția lui } A_{k+1} \text{ pe axa } Ox. \end{cases}$$

Arătați că dacă punctul A_k are coordonatele $(x_k; y_k)$, atunci:

a) Șirul de termen general $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ este divergent;

b) Șirul de termen general $T_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$ este convergent.

Vasile POP

Subiectul 2. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin relațiile $x_0 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = 2x_n^2 + 2x_n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Aflați numerele $M \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că dacă $x_0 \leq M$ atunci $x_n \leq M$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că pentru $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

c) Determinați expresia x_n în funcție de x_0 și n .

Vasile
BERINDE

Subiectul 3. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o bijecție continuă cu proprietatea că $g \circ g$ are o mulțime finită, nevidă de puncte fixe ($x_0 \in \mathbb{R}$ este un punct fix al lui h , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $h(x_0) = x_0$). Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x) = f(g(x))$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dorian
POPA

Subiectul 4. Fie matricele $A_1; A_2; \dots; A_n \in M_n(\mathbb{C})$. Arătați că :

a) $\det(A_1 + A_2) + \det(A_1 + \varepsilon A_2) + \dots + \det(A_1 + \varepsilon^{n-1} A_2) = n(\det A_1 + \det A_2)$,

$$\text{unde } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

b) $\sum \det(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \dots + \varepsilon_n A_n) = n^n \sum_{k=1}^n \det A_k$, unde suma din membrul stâng se efectuează după toate cele n^n alegeri $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{C}^n$, cu proprietatea că $\varepsilon_k^n = 1, (k = \overline{1, n})$.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^3 = x$, oricare ar fi $x \in A$. Demonstrați că

a) Pentru orice $x, y \in A$, avem $x^2 y x = y x$ și $x y x^2 = x y$;

b) Inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ.

Maria S.
POP

Subiectul 2. Determinați funcțiile continue $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_1^x f(t) dt = \int_{x^k}^{x^{k-1}} f(t) dt, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}, x \in (0; \infty).$$

Dan

BĂRBOSU

Subiectul 3. Fie $f, g : \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{ctg}^2 x$, $g(x) = \ln(\sin x)$.

a) Stabiliți o relație între primitivele lui f și g pe $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) Notând cu $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$, $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, calculați: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$
și $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J(\alpha)$.

Gheorghe

SZOLOSSY

Subiectul 4. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ în care există elementele nenule, distincte a, b, c astfel ca mulțimea $M = \{a^n + b^n + c^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ să fie finită.

a) Să se arate că există un grup multiplicativ (G, \cdot) , $G \subset K$, care conține pe a, b și c ;

b) Rămâne rezultatul dacă în loc de „corp comutativ” se ia „inel comutativ”?

Vasil

e POP

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore
Toate subiecte sunt obligatorii.